Пример использования пакета wxMaxima для иллюстрации вывода метрик Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрёма

```
(%i1) kill(all);
(%o0) done
```

```
(%i1) load(ctensor);
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.30.0/share/tensor/ctensor.mac
```

можно воспользоваться функцией csetup

```
(%i2) csetup();
Enter the dimension of the coordinate system: 4;
Do you wish to change the coordinate names? y;
Enter a list containing the names of the coordinates in order
[t,r,theta,phi];
Do you want to1. Enter a new metric?2. Enter a metric from a file?3. Approxi
1;
Is the matrix  1. Diagonal  2. Symmetric  3. Antisymmetric  4. General
Answer 1, 2, 3 or 4 : 1;
Row 1 Column 1: B;
Row 2 Column 2: -A;
Row 3 Column 3: -r^2;
Row 4 Column 4: -r^2*sin(theta)^2;
Matrix entered.
Enter functional dependencies with DEPENDS or 'N' if none
depends([A,B],[r]);
Do you wish to see the metric? y;
```

$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

```
(%o2) done
```

но лучше эти команды ввести вручную:

```
(%i3) kill(all);
(%o0) done
```

```
(%i1) load(ctensor);
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.30.0/share/tensor/ctensor.mac
```

```
(%i2) ct_coords:[t,r,theta,phi];
```

(%o2) $[t,r,\theta,\phi]$

```
(%i3) depends([A,B],[r]);
```

(%o3) $[A(r),B(r)]$

```
(%i4) lg:matrix([B,0,0,0],[0,-A,0,0],[0,0,-r^2,0],[0,0,0,-r^2*sin(theta)^2]
```

(%o4)
$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) cmetric(true);
```

Do you wish to see the metric inverse? y;

(%t5)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$

(%o5) *done*

Символы Кристоффеля:

(%i6) christof(mcs);

(%t6) $mcs_{1,1,2}=\frac{\frac{d}{d\,r}\,B}{2\,A}$

(%t7) $mcs_{1,2,1}=\frac{\frac{d}{d\,r}\,B}{2\,B}$

(%t8) $mcs_{2,2,2}=\frac{\frac{d}{d\,r}\,A}{2\,A}$

(%t9) $mcs_{2,3,3}=\frac{1}{r}$

(%t10) $mcs_{2,4,4}=\frac{1}{r}$

(%t11) $mcs_{3,3,2}=-\frac{r}{A}$

(%t12) $mcs_{3,4,4}=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

(%t13) $mcs_{4,4,2}=-\frac{r\sin(\theta)^2}{A}$

(%t14) $mcs_{4,4,3}=-\cos(\theta)\sin(\theta)$

(%o14) *done*

Ковариантные компоненты тензора Риччи:

(%i15) ricci(true);

(%t15) $ric_{1,1}=\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,B}{2\,A}-\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)^2}{4\,A\,B}-\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)}{4\,A^2}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,B}{r\,A}$

(%t16) $ric_{2,2}=-\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,B}{2\,B}+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)^2}{4\,B^2}+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)}{4\,A\,B}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,A}{r\,A}$

(%t17) $ric_{3,3}=-\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)}{2\,A\,B}+\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)}{2\,A^2}-\frac{1}{A}+1$

(%t18) $ric_{4,4}=-\frac{r\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)}{2\,A\,B}+\frac{r\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)}{2\,A^2}-\frac{\sin(\theta)^2}{A}+\sin(\theta)^2$

(%o18) *done*

Смешанные компоненты тензора Риччи:

(%i19) uricci(true);

(%t19) $$uric_{1,1}=\frac{2\,r\,A\,B\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,B\right)-r\,A\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)^2+\left(4\,A-r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)\right)B\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)}{4\,r\,A^2\,B^2}$$

(%t20) $$uric_{2,2}=\frac{2\,r\,A\,B\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,B\right)-r\,A\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)^2-r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)B\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)-4\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)B^2}{4\,r\,A^2\,B^2}$$

(%t21) $$uric_{3,3}=\frac{r\,A\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)+\left(-r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)-2\,A^2+2\,A\right)B}{2\,r^2\,A^2\,B}$$

(%t22) $$uric_{4,4}=\frac{r\,A\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)+\left(-r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)-2\,A^2+2\,A\right)B}{2\,r^2\,A^2\,B}$$

(%o22) *done*

Ковариантные компоненты тензора Эйнштейна:

(%i23) leinstein(true);

(%t23) $$lein_{1,1}=\frac{\left(r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)+A^2-A\right)B}{r^2\,A^2}$$

(%t24) $$lein_{2,2}=\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)+(1-A)\,B}{r^2\,B}$$

(%t25) $$lein_{3,3}=\frac{r\left(2\,r\,A\,B\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,B\right)-r\,A\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)^2+\left(2\,A-r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)\right)B\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)-2\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)B^2\right)}{4\,A^2\,B^2}$$

(%t26) $$lein_{4,4}=$$
$$\frac{r\sin(\theta)^2\left(2\,r\,A\,B\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,B\right)-r\,A\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)^2+\left(2\,A-r\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)\right)B\left(\frac{d}{d\,r}\,B\right)-2\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)B^2\right)}{4\,A^2\,B^2}$$

(%o26) *done*

Смешанные компоненты тензора Эйнштейна:

(%i27) einstein(true);

(%t27) $$ein_{1,1}=\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}A\right)+A^2-A}{r^2\,A^2}$$

(%t28) $$ein_{2,2}=-\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}B\right)+(1-A)\,B}{r^2\,A\,B}$$

(%t29) $$ein_{3,3}=-\frac{2\,r\,A\,B\left(\frac{d^2}{d\,r^2}B\right)-r\,A\left(\frac{d}{d\,r}B\right)^2+\left(2\,A-r\left(\frac{d}{d\,r}A\right)\right)B\left(\frac{d}{d\,r}B\right)-2\left(\frac{d}{d\,r}A\right)B^2}{4\,r\,A^2\,B^2}$$

(%t30) $$ein_{4,4}=-\frac{2\,r\,A\,B\left(\frac{d^2}{d\,r^2}B\right)-r\,A\left(\frac{d}{d\,r}B\right)^2+\left(2\,A-r\left(\frac{d}{d\,r}A\right)\right)B\left(\frac{d}{d\,r}B\right)-2\left(\frac{d}{d\,r}A\right)B^2}{4\,r\,A^2\,B^2}$$

(%o30) *done*

Статичное сферически-симметричное решение уравнения Эйнштейна без заряда

(%i31) ode2(ev(lein[1,1],theta=%pi/2),A,r);

(%o31) $\log(A)-\log(A-1)=\log(r)+\%c$

(%i32) logcontract(%);

(%o32) $$\log\left(\frac{A}{A-1}\right)=\log(r)+\%c$$

(%i33) solve(%,A);

(%o33) $$\left[A=\frac{\%e^{\%c}\,r}{\%e^{\%c}\,r-1}\right]$$

(будем пользоваться граничными условиями для определения констант,
при этом для удобства вычислений G=c=1)

(%i34) %,%c=-log(2*M);

(%o34) $$\left[A=\frac{r}{2\left(\frac{r}{2\,M}-1\right)M}\right]$$

(%i35) A:%[1],%c=-log(2*M);

(%o35) $$A=\frac{r}{2\left(\frac{r}{2\,M}-1\right)M}$$

(%i36) ode2(ev(lein[2,2],A),B,r);

(%o36) $$B=\%c\,\%e^{-2\left(\frac{\log(r)}{2\,M}-\frac{\log(r-2\,M)}{2\,M}\right)M}$$

(%i37)
```
logcontract(%);
```
(%o37) $B=-\frac{\%c\,(2\,M-r)}{r}$

(Используем граничные условия AB=1, откуда найдём константу %c. Затем полу
подставим в правую часть уравнения выше, чтобы получить функцию B)

(%i38)
```
B:ev(%,%c=rhs(solve(rhs(%)*rhs(A)=1,%c)[1]));
```
(%o38) $B=-\frac{2\,M-r}{r}$

Проверим, удовлетворяют ли полученные функции A и B Зему уравнению:

(%i39)
```
factor(ev(ev(lein[3,3],A,B),diff));
```
(%o39) 0

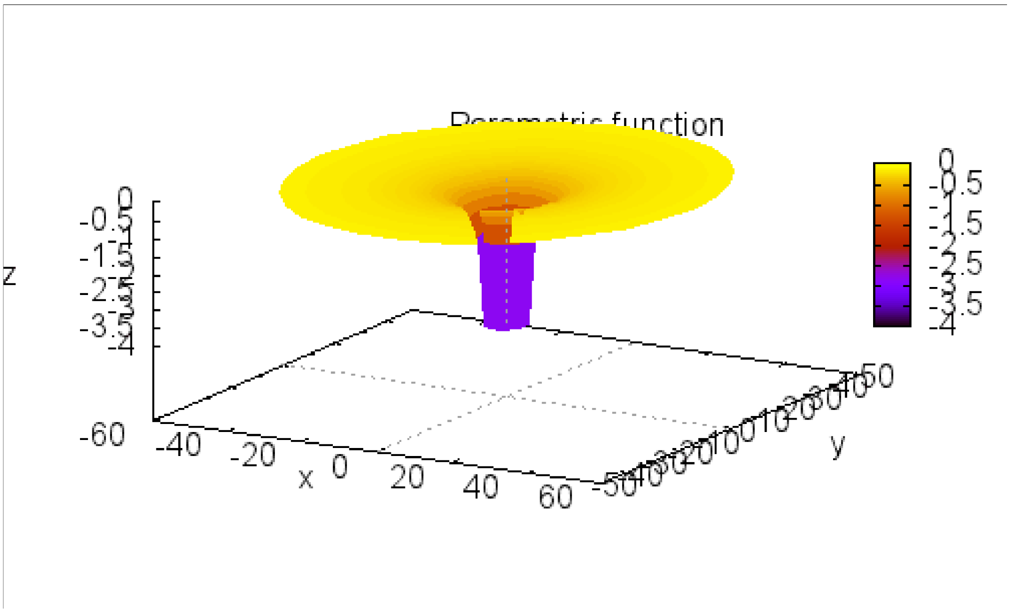
Таким образом, метрический тензор Шварцшильда (1916)):

(%i40)
```
lg:ev(lg,A,B);
```
(%o40)
$$\begin{bmatrix} -\frac{2\,M-r}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{2\left(\frac{r}{2\,M}-1\right)M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

(%i41)
```
ug:invert(lg);
```
(%o41)
$$\begin{bmatrix} -\frac{r}{2\,M-r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\left(\frac{r}{2\,M}-1\right)M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$

```
(%i43) wxplot3d([r*cos(th),r*sin(th),1-ev(ug[1,1],M:2)],[r,5,50],[th,-%pi,%p
```

(%t43)



(%o43)

Выведем теперь метрику с учётом заряда. Будем считать,
что тензор энергии-импульса уже известен
(см. С.И. Глазырин, "Вывод метрики Керра-Ньюмана")

```
(%i1) kill(all);
(%o0) done
```

```
(%i1) load(ctensor);
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.30.0/share/tensor/ctensor.mac
```

```
(%i2) ct_coords:[t,r,theta,phi];
```

(%o2) $[t,r,\theta,\phi]$

```
(%i3) depends([A,B],[r]);
```

(%o3) $[A(r),B(r)]$

```
(%i4) lg:matrix([B,0,0,0],[0,-A,0,0],[0,0,-r^2,0],[0,0,0,-r^2*sin(theta)^2]
```

(%o4)
$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) cmetric();
(%o5) done
```

```
(%i6) christof(false);
(%o6) done
```

(%i7) uricci(false);

(%o7) $done$

(%i8) einstein(false);

(%o8) $done$

(%i9) solve(ode2(ein[1,1]=q^2/r^4,A,r),A);

(%o9) $$[A=\frac{r^2}{r^2-\%c\ r+q^2}]$$

(%i10) %,%c=2*M;

(%o10) $$[A=\frac{r^2}{-2\ r\ M+r^2+q^2}]$$

(%i11) A:%[1],%c=2*M;

(%o11) $$A=\frac{r^2}{-2\ r\ M+r^2+q^2}$$

(%i12) solve(ode2(ev(ein[2,2],A)=q^2/r^4,B,r),B);

(%o12) $$[B=-\frac{2\ \%c\ r\ M-\%c\ r^2-\%c\ q^2}{r^2}]$$

(опять же из граничных условий)

(%i13) %,%c=1;

(%o13) $$[B=-\frac{2\ r\ M-r^2-q^2}{r^2}]$$

(%i14) B:%[1],%c=1;

(%o14) $$B=-\frac{2\ r\ M-r^2-q^2}{r^2}$$

(%i15) expand(B);

(%o15) $$B=-\frac{2\ M}{r}+\frac{q^2}{r^2}+1$$

(%i16) factor(ev(ev(ein[3,3]+q^2/r^4,A,B),diff));

(%o16) 0

Метрика Рейсснера (1916)-Нордстрёма (1918):

(%i17) `lg:expand(ev(lg,A,B));`

(%o17)
$$\begin{bmatrix} -\frac{2\,M}{r}+\frac{q^2}{r^2}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r^2}{-2\,r\,M+r^2+q^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\,\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

(%i18) `ug:expand(invert(lg));`

(%o18)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{-\frac{2\,M}{r}+\frac{q^2}{r^2}+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,M}{r}-\frac{q^2}{r^2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\,\sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$