Памятка о геодезическом лагранжиане и символах Кристоффеля

По определению геодезическая $\mathbf{x}(\lambda)$ получается из вариационного принципа

$$\delta \int_a^b \mathcal{L}[\mathbf{x}(\lambda)]d\lambda = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{L}[\mathbf{x}(\lambda)] \equiv \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}}\ . \tag{1}$$

Пусть s – собственная длина геодезической (а не произвольный параметр λ). Было доказано: для гладкой монотонной функции $f(\mathcal{L})$ вариационные принципы

$$\delta \int_a^b f(\mathcal{L})ds = 0 \quad \text{и} \quad \delta \int_a^b \mathcal{L}ds = 0 \tag{2}$$

приводят к одинаковым экстремалям. Обозначим

$$\grave{x}^i \equiv \frac{dx^i}{ds}$$

(так же обратным штрихом обозначаем производные по λ или τ). Удобно взять $f(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^2$:

$$L_s \equiv \mathcal{L}^2 = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} \equiv g_{ik}\grave{x}^i\grave{x}^k, \quad \text{откуда уравнения Эйлера-Лагранжа} \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{x}^n}\right) - \frac{\partial L_s}{\partial x^n} = 0. \tag{3}$$

Последнее равенство и даёт уравнение геодезической

$$\frac{d^2x^n}{ds^2} + \Gamma^n_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad \text{оно же} \qquad \grave{\grave{x}}^n + \Gamma^n_{ik}\grave{x}^i\grave{x}^k = 0\ . \tag{4}$$

Тут Γ^n_{ik} – коэффициенты связности = символы Кристоффеля. Их выражения через g_{ik} получаются сразу же из (3), но явный вид нам почти не нужен! Через 4-скорость, $u^i \equiv dx^i/ds$, (4) даёт:

$$du^i + \Gamma^i_{nm}u^n dx^m = 0\ .$$

Это заменяет условие $du^i = 0$ инерциального движения в плоском пространстве-времени, а в искривленном мире это просто $Du^i = 0$, если принять следующее определение ковариантного дифференциала D для любого 4-вектора A^i:

$$DA^i \equiv dA^i + \Gamma^i_{nm}A^n dx^m \qquad \text{и} \qquad DA_i \equiv dA_i - \Gamma^n_{im}A_n dx^m. \tag{5}$$

По метрике g_{ik} можно механически вычислить коэффициенты связности Γ^i_{mn} и тензор кривизны Римана (Riemann tensor), выражение для которого сразу получается из изменения вектора ΔA_k

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}R^i_{klm}A_i\,\Delta f^{lm}, \tag{6}$$

при параллельном переносе A_i по маленьким контурам $\Delta f^{lm} \sim dx^l dx^m$, нужно только учесть, что из $DA_i = 0$ в (5) имеем $\delta A_k = \Gamma^n_{im}A_n dx^m$ и разложить всё по Тейлору в первом порядке $\sim dx$ как при выводе теоремы Грина (но ни Грина, ни Стокса не использовать!):

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\ .$$

Тензор Риччи (Ricci) есть

$$R_{ik} \equiv R^m_{imk} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ik} - \Gamma^m_{nk}\Gamma^n_{im}\ . \tag{7}$$

Для действия Гильберта нам будет нужен только скаляр Риччи, т.е. свёртка

$$R \equiv R^i_i = g^{ik}R_{ik}\ .$$

Для вывода решения Шварцшильда метрику берём в виде

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(t,r)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(t,r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2\ , \tag{8}$$

(здесь единцы $c = 1$), тогда геодезический лагранжиан:

$$L_s = \mathrm{e}^{\nu(t,r)}(\grave{t})^2 - \mathrm{e}^{\lambda(t,r)}(\grave{r})^2 - r^2(\grave{\theta})^2 - r^2\sin^2\theta(\grave{\varphi})^2.$$

Можно показать, что Ansatz (8) исчерпывает статические сферически симметричные решения в пустоте (т.е. без вращения источника гравитации, так как $g_{0\alpha} = 0$).

Уравнения Эйлера-Лагранжа (ELE) для этого L_s по t:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{t}}\right) - \frac{\partial L_s}{\partial t} = 0$$

т.е., обозначая точкой сверху $\dot{\nu} \equiv \partial_{,0}\nu \equiv \partial_{,t}\nu$, имеем:

$$\frac{d}{d\tau}(2\mathrm{e}^{\nu}\grave{t}) - \mathrm{e}^{\nu}\dot{\nu}(\grave{t})^2 + \mathrm{e}^{\lambda}\dot{\lambda}(\grave{r})^2 = 0 \ .$$

Учтём, что $\grave{\nu} = \dot{\nu}\grave{t} + \nu'\grave{r}$, обозначая прямым штрихом $\nu' \equiv \partial_{,1}\nu \equiv \partial_{,r}\nu$, получаем:

$$2\mathrm{e}^{\nu}\grave{\grave{t}} + 2\mathrm{e}^{\nu}\dot{\nu}(\grave{t})^2 + 2\mathrm{e}^{\nu}\nu'\grave{t}\grave{r} - \mathrm{e}^{\nu}\dot{\nu}(\grave{t})^2 + \mathrm{e}^{\lambda}\dot{\lambda}(\grave{r})^2 = 0 \ .$$

Отсюда:

$$\grave{\grave{t}} + \frac{1}{2}\dot{\nu}(\grave{t})^2 + \nu'\grave{t}\grave{r} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}(\grave{r})^2 = 0 \ ,$$

а из (4)

$$\grave{\grave{x}}^0 + \Gamma^0_{ik}\grave{x}^i\grave{x}^k = 0$$

Из этих выражений можно просто считывать ненулевые Γ^n_{ik}, пользуясь уравнением геодезической (4). Например, Γ^0_{00} есть коэффициент при $\grave{t}^{\,2}$, а Γ^0_{11} есть коэффициент при $\grave{r}^{\,2}$, и т.п., т.е.

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu} \equiv \frac{1}{2}\nu_{,0},$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\nu' \equiv \frac{1}{2}\nu_{,1} = \Gamma^0_{10},$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} \ .$$

Остальные кристоффели этой серии нулевые.

Уравнения Эйлера-Лагранжа (ELE) по r:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{r}}\right) - \frac{\partial L_s}{\partial r} = 0 \ .$$

дадут кристофелли с верхним индексом 1:

$$-\frac{d}{d\tau}(2\mathrm{e}^{\lambda}\grave{r}\,) - \mathrm{e}^{\nu}\nu'(\grave{t})^2 + \mathrm{e}^{\lambda}\lambda'(\grave{r})^2 + 2r(\grave{\theta}^{\,2} + \sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2}) = 0 \ .$$

Учтём, что $\grave{\lambda} = \dot{\lambda}\grave{t} + \lambda'\grave{r}$:

$$-2\mathrm{e}^{\lambda}\grave{\grave{r}} - \mathrm{e}^{\lambda}\lambda'(\grave{r})^2 - 2\mathrm{e}^{\lambda}\dot{\lambda}\grave{t}\grave{r} - \mathrm{e}^{\nu}\nu'(\grave{t})^2 + 2r(\grave{\theta}^{\,2} + \sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2}) = 0 \ .$$

Отсюда:

$$\grave{\grave{r}} + \frac{1}{2}\lambda'(\grave{r})^2 + \dot{\lambda}\grave{t}\grave{r} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\nu'(\grave{t})^2 - r\mathrm{e}^{-\lambda}(\grave{\theta}^{\,2} + \sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2}) = 0 \ .$$

Значит:

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\dot{\lambda},$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda',$$

$$\Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda},$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\mathrm{e}^{-\lambda},$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\nu' \ .$$

В том же духе можно получить и остальные ненулевые кристоффели, взяв ELE для θ и φ:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\theta.$$