Памятка о вычислении тензора Риччи

$$R_{ik} \equiv R^m_{imk} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ik} - \Gamma^m_{nk}\Gamma^n_{im} \ . \tag{1}$$

Для метрики вида

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(t,r)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(t,r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \ , \tag{2}$$

мы получили все ненулевые кристоффели из геодезического лагранжиана:

$$\begin{gathered}\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu}, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\nu' = \Gamma^0_{10}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} \ , \\ \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\nu', \quad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\dot{\lambda} = \Gamma^1_{10}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda', \quad \Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\mathrm{e}^{-\lambda} \ , \\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\theta = \Gamma^3_{32} \ .\end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что в R_{ik} (1) входят такие суммы:

$$\Gamma^m_{0m} = \left(\frac{\dot{\nu}+\dot{\lambda}}{2}\right), \quad \Gamma^m_{3m} = 0, \quad \Gamma^m_{1m} = \frac{1}{2}(\nu' + \lambda' + \frac{4}{r}), \quad \Gamma^m_{2m} = \mathrm{ctg}\,\theta.$$

Вычисление R_{00} проведём полностью:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial \Gamma^m_{00}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{0m}}{\partial x^0} + \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{00} - \Gamma^m_{n0}\Gamma^n_{m0} = \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial r} + \\ &- \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{\nu}+\dot{\lambda}}{2}\right) + \Gamma^m_{0m}\Gamma^0_{00} + \Gamma^m_{1m}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - \\ &- \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{10} = \cancel{\frac{\ddot{\nu}}{2}} + \frac{\nu''}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda} + \nu'\,\frac{\cancel{\nu'} - \lambda'}{2}\,\mathrm{e}^{\nu-\lambda} - \frac{\cancel{\ddot{\nu}} + \ddot{\lambda}}{2} + \\ &+ \frac{\dot{\nu}}{2}\frac{\cancel{\dot{\nu}} + \dot{\lambda}}{2} + \mathrm{e}^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \cancel{\frac{\dot{\nu}^2}{4}} - \cancel{2\times\frac{\nu'^2}{4}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} = \\ &= \frac{\nu''}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \mathrm{e}^{\nu-\lambda}\,\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь одинаковыми чёрточками или крестиками помечены подобные члены. Видно, что работа вполне посильная, формулы получаются обозримые. MTW описывают и более умные способы вычисления через косые формы.

Так же можно расписать остальные компоненты R_{ik}. Для тренировки попробуйте, и вставьте в TEX. Исходный TEX-файл этой лекции я высылаю.

Выписываем все ненулевые компоненты R_{ik}:

$$R_{00} = \frac{\nu''}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \mathrm{e}^{\nu-\lambda}\,\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \ ,$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r} \ ,$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{\lambda}}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda-\nu} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\,\frac{\dot{\lambda}+\dot{\nu}}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda-\nu} - \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'^2}{4}\right) \ ,$$

$$R_{22} = -\left(\mathrm{e}^{-\lambda} - r\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda'-\nu'}{2} - 1\right) \ ,$$

$$R_{33} = -\sin^2\theta\left(\mathrm{e}^{-\lambda} - r\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda'-\nu'}{2} - 1\right) \ ,$$

Нам для вариаций нужен только **один** скаляр Риччи R, т.е. свертка $R = R^i_i = g^{ik}R_{ik}$. Здесь

$$g^{ik} = \mathrm{diag}\{\mathrm{e}^{-\nu(t,r)}, -\mathrm{e}^{-\lambda(t,r)}, -r^{-2}, -r^{-2}\sin^{-2}\theta\} \ .$$

Получим R, умножая R_{ik} на g^{ik}, первая строка ниже из R_{00}, вторая из R_{11}, а третья - – сумма из R_{22} и R_{33}, причём $\sin^2\theta$ счастливо сокращается:

$$
\begin{aligned}
R = {} & \boxed{\frac{\nu''}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}} - \frac{\ddot{\lambda}}{2}\mathrm{e}^{-\nu} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4}\mathrm{e}^{-\nu} + \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\nu'}{2}\left(\boxed{\frac{\nu'-\lambda'}{2}} + \boxed{\frac{2}{r}}\right) - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\mathrm{e}^{-\nu} - \\
& - \frac{\ddot{\lambda}}{2}\,\mathrm{e}^{-\nu} - \frac{\dot{\lambda}}{2}\,\frac{\dot{\lambda} - \dot{\nu}}{2}\mathrm{e}^{-\nu} + \left(\boxed{\frac{\nu''}{2}} - \boxed{\frac{\nu'\lambda'}{4}} - \frac{\lambda'}{r} + \boxed{\frac{\nu'^2}{4}}\right)\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \\
& + 2\times\left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{r^2} - \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda' - \boxed{\nu'}}{2r} - \frac{1}{r^2}\right) = \\
= {} & \nu''\mathrm{e}^{-\lambda} - \ddot{\lambda}\mathrm{e}^{-\nu} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\mathrm{e}^{-\nu} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2}\mathrm{e}^{-\nu} + \mathrm{e}^{-\lambda}\,\nu'\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) + \\
& + 2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{r^2} - \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Теперь опустим зависимость от времени, т.е. будем искать решение в виде

$$
ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(r)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \ . \tag{6}
$$

Тогда R получаем из (5), если опустим все точки.

Всю эту механическую работу можно сделать, например, на `Maple`. На `Maple` мой компьютер мне выдал:

$$
\begin{aligned}
R = \Bigg[& -r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,\nu(r)\right) - \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\nu(r)\right)^2 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\nu(r)\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\lambda(r)\right) \\
& -2\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\nu(r)\right)r + 2\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\lambda(r)\right)r + 2\mathrm{e}^{\lambda(r)} - 2\Bigg] \Big/ (r^2\,\mathrm{e}^{\lambda(r)})
\end{aligned}
$$

Если проделать вручную и сравнить с (5) видно, что ответ Мапла (`Maple`) правильный, только знак R другой. Такое определение там принято – следить надо внимательно. Правда, для вакуумных решений знак R неважен.

Обозначая $\nu' \equiv \partial_r\nu$, $\nu'' \equiv \partial_r^2\nu$ и т.п., можно R с "нашим" знаком записать так:

$$
R = \left[r^2\nu'' + ({}^1\!/_2)r^2\,(\nu')^2 - ({}^1\!/_2)r^2\nu'\lambda' + 2\nu' r - 2\lambda' r - 2\mathrm{e}^{\lambda} + 2\right] \Big/ (r^2\,\mathrm{e}^{\lambda})
$$

или

$$
R = \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\nu'' + ({}^1\!/_2)\,(\nu')^2 - ({}^1\!/_2)\nu'\lambda' + 2(\nu'-\lambda')/r + 2/r^2\right] - 2/r^2
$$