Лекция 8. Уравнения движения как следствие уравнений Эйнштейна

Блинников С.И.

17 октября 2012 г.

Аннотация

Вариационный принцип Гильберта, уравнения Эйнштейна. Движение пробных частиц как следствие уравнений Эйнштейна – не рассказывалось в классе.

1 Уравнения для метрики

Во-первых, мы рассмотрим гравитацию только снаружи массивных тел, т.е. в вакууме. Уравнения Эйнштейна, которые регулируют поведение релятивистских гравитационных потенциалов, то есть метрики, могут быть получены из принципа наименьшего действия. Действие для метрики (оно называется действием Гильберта) должно быть интегралом по пространству-времени от Лагранжевой плотности:

$$S_H = \int \mathcal{L}_H d^4x \ .$$

Плотность лагранжиана $\mathcal{L}_H$ можно записать как $\sqrt{-g}$, умноженное на скаляр. Множитель $\sqrt{-g} \equiv \sqrt{-\det g_{ik}}$ просто переводит элемент координатного объема d^4x в физический 4-мерный объём. Это легко увидеть в случае диагональной метрики, когда каждый координатный отрезок dx^i переводится в физический отрезок умножением на свой метрический коэффициент: $\sqrt{g_{00}}dx^0$, $\sqrt{-g_{11}}dx^1$, $\sqrt{-g_{22}}dx^2$, $\sqrt{-g_{33}}dx^3$. В этом случае $\sqrt{-g}$ есть просто произведение этих диагональных коэффициентов. В общем случае по теоремам из анализа о кратных интегралах появляется якобиан преобразования, который и является детерминантом g_{ik}.

Какие скаляры можно сделать из метрического тензора? Гильберт увидел, что скаляр построенный из g_{ik}, который не содержит его производных выше второго порядка, является скаляром кривизны Риччи $R = g^{ik}R_{ik}$ (где $R_{ik} = R^m_{ikm}$ — тензор Риччи). Гильберт был первым, кто понял, что ОТО может быть выведена из действия с этим простейшим выбором для лагранжиана, и предложил

$$\mathcal{L}_H = \frac{c^3}{16\pi G_{\rm N}}\sqrt{-g}R \ .$$

Long ago Clifford conjectured that the empty space has its own elasticity. One can say that $\mathcal{L}$ describes this elasticity, or better to say rigidity, the tendency of the space to remain flat. The constant $c^3/16\pi G_{\rm N}$ is high and reflects the fact that the space is weakly curved because its rigidity is high. The number $c^3/16\pi G_{\rm N}$ has a dimension. If we say it is big, then it is not clear relative to what? The dimensionless measure is $Gm^2/\hbar c$, analogous to e.m. constant $e^2/\hbar c = 1/137$. From this we get the Planck mass

$$m_{\rm Pl} = \sqrt{c\hbar/G_{\rm N}} \simeq 10^{-5}{\rm g} \simeq 10^{19}\ {\rm GeV}$$

A typical length for this mass is:

$$l_{\rm Pl} = \frac{\hbar}{m_{\rm Pl}c} = \sqrt{\frac{G_{\rm N}\hbar}{c^3}} = 10^{-33}\ {\rm cm}.$$

It is clear that $l_{\rm Pl}$ is r_g for the Planck mass. Thus the space is strongly curved at the distance $l_{\rm Pl}$ from mass $m_{\rm Pl}$. For nucleons $m \sim 10^{-24}\,{\rm g} \ll m_{\rm Pl}$, $l \sim 10^{-13}\,{\rm cm} \gg l_{\rm Pl}$, i.e. the effects of gravity and curvature are small in the volume of particles. This illustrates the high rigidity of vacuum.

The equations of motion, here the Einstein equations for the field g_{ik}, should come from varying the action with respect to the metric. But again, as in the case of orbits, the explicit form of equations is not needed very often, since their integrals already 'sit' in the Lagrangian.

2 'Сохранение' энергии-импульса и геодезические

2.1 Вывод из ковариантной дивергенции энергии-импульса

В стандартных учебниках показывают, что вариация действия Гильберта для гравитационного поля при вариации метрики есть

$$\delta S_H = \varkappa \int (R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d^4x \ . \tag{1}$$

Мы не обсуждали, как вывести уравнения Эйнштейна

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = \frac{8\pi G_{\rm N}}{c^4}T^{ik} \tag{2}$$

например, из вариационного принципа Гильберта, используя (1), но это можно посмотреть в учебниках (есть в ЛЛ, или в книжке Хриповича). Как мы поняли на примере вывода решений Шварцшильда и скоро увидим при выводе уравнений Фридмана, связь вариационного принципа Гильберта с уравнениями Эйнштейна вовсе не тривиальна из-за внеинтегральных членов (см. Wald, и др. ...). Поэтому реально не так уж нужно 'выводить' этот фундаментальнейший закон природы. Этот закон умные люди сумели открыть, и его можно принять за постулат. А потом сравнивать его следствия с экспериментом.

Тут обсудим только одно важное следствие уравнений (2): движение пробных частиц по геодезическим. Сначала нужно показать, что из уравнений Эйнштейна (2) следует равенство $T^{ik}_{;k} = 0$. Оно фактически и есть уравнение движения для среды с тензором энергии-импульса T^{ik}. Обычно это выводят чисто геометрически из так называемого тождества Бианки для тензора Римана, которое в свёрнутом виде даёт

$$(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} = 0 \ ,$$

а, значит, из (2) следует и $T^{ik}_{;k} = 0$. Но тождество Биянки не очень-то просто и наглядно "угадать". Оказывается, есть другой, более физичный путь ко всем этим соотношениям через вариационный принцип.

2.2 Вывод попутно с векторами Киллинга

Итак, выведем соотношение $(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} = 0$ из вариационного принципа.

Возьмём малое возмущение координат

$$\tilde{x}^i = x^i + \eta^i \ .$$

Физическая точка — мировая точка — одна и та же. Только координаты изменяем $\tilde{x}^i = F(\vec{x})$. **Здесь полезно сравнить с ЛЛ, и с книжкой по ОТО t'Hooft'a.**

По общей формуле преобразования тензоров

$$\tilde{g}^{ik}(\tilde{x}) = g^{mn}(x)\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^n} \approx g^{ik}(x) + g^{im}\frac{\partial \eta^k}{\partial x^m} + g^{km}\frac{\partial \eta^i}{\partial x^m} \ .$$

Также с точностью первого порядка по возмущению

$$\tilde{g}^{ik}(\tilde{x}) = \tilde{g}^{ik}(x) + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n}\eta^n \ ,$$

и вариацию g^{ik} (при одном значении аргумента x – проверить, мб $\tilde{x}$) можно записать так:

$$\tilde{g}^{ik}(x) - g^{ik}(x) = \delta g^{ik}(x) = g^{im}\frac{\partial \eta^k}{\partial x^m} + g^{km}\frac{\partial \eta^i}{\partial x^m} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n}\eta^n \ .$$

Выразим частные производные по x через ковариантные:

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x^m} = \partial_m \eta^k = \eta^k_{;m} - \Gamma^k_{nm}\eta^n = \eta^k_{;m} - \frac{1}{2}g^{lk}(\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{nm})\eta^n \ ,$$

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial x^m} = \partial_m \eta^i = \eta^i_{;m} - \Gamma^i_{nm}\eta^n = \eta^i_{;m} - \frac{1}{2}g^{li}(\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{nm})\eta^n \ ,$$

Домножим обе строки на g^{im}, g^{km} и сложим:

$$g^{im}\partial_m \eta^k + g^{km}\partial_m \eta^i = g^{im}\eta^k_{;m} - \frac{1}{2}g^{im}g^{lk}(\underline{\partial_m g_{nl}} + \partial_n g_{ml} - \underline{\partial_l g_{nm}})\eta^n$$

$$+g^{km}\eta^i_{;m} - \frac{1}{2}g^{km}g^{li}(\underline{\partial_m g_{nl}} + \partial_n g_{ml} - \underline{\partial_l g_{nm}})\eta^n \ ,$$

одинаково подчёркнутые члены можно сократить, заменяя немые индексы $m \rightleftarrows l$. Тогда получим

$$g^{im}\eta^k_{;m} - \frac{1}{2}g^{im}g^{lk}(\partial_n g_{ml})\eta^n + g^{km}\eta^i_{;m} - \frac{1}{2}g^{km}g^{li}(\partial_n g_{ml})\eta^n \ ,$$

и, опять меняя в последнем члене $m \rightleftarrows l$,

$$g^{im}\eta^k_{;m} - g^{im}g^{lk}(\partial_n g_{ml})\eta^n + g^{km}\eta^i_{;m} \ . \tag{3}$$

Из того, что g^{ab} является обратной матрицей к g_{ab},

$$g_{il}g^{lm} = \delta^m_i \ ,$$

имеем

$$(\partial_k g_{il})g^{lm} + g_{il}(\partial_k g^{lm}) = 0 \ ,$$

т.е.

$$g^{lm}(\partial_k g_{il}) = -g_{il}(\partial_k g^{lm}) \ .$$

Значит в (3),

$$g^{lk}(\partial_n g_{ml}) = -g_{ml}(\partial_n g^{lk}) \ ,$$

а

$$g^{im}g^{lk}(\partial_n g_{ml}) = -g^{im}g_{ml}(\partial_n g^{lk}) = -\delta^i_l \partial_n g^{lk} = -\partial_n g^{ik} \ ,$$

откуда

$$g^{im}\partial_m \eta^k + g^{km}\partial_m \eta^i = g^{im}\eta^k_{;m} + g^{km}\eta^i_{;m} + \partial_n g^{ik}\eta^n \ .$$

и

$$\delta g^{ik} = g^{im}\partial_m \eta^k + g^{km}\partial_m \eta^i - \partial_n g^{ik}\eta^n = g^{im}\eta^k_{;m} + g^{km}\eta^i_{;m} = \eta^{k;i} + \eta^{i;k} \ .$$

Это и есть наш главный результат сегодня:

$$\delta g^{ik} = \eta^{k;i} + \eta^{i;k} \ . \tag{4}$$

Опять же из определения обратной матрицы $g_{il}g^{lm} = \delta^m_i$ имеем

$$\delta g_{ik} = -\eta_{k;i} - \eta_{i;k} \ . \tag{5}$$

Если у нас при таких возмущениях получается $\delta g_{ik} = 0$, то уравнения $\eta_{k;i} + \eta_{i;k} = 0$ определяют векторное поле, которое называют вектором Киллинга. Про них и про связь с производной Ли смотри **вложения – сделать в тексте**.

Подставив в (1) вариации метрики $\delta g^{ik} = \eta^{k;i} + \eta^{i;k}$ для специального класса возмущений, которые мы только что рассмотрели, получим $\delta S_H = 0$, так как S_H есть скаляр и от преобразования координат никак не должен меняться. Повторив все рассуждения из параграфа ЛЛ о тензоре энергии-импульса в гравитации (в издании 1967 г. это §94), где они получили $T^{ik}_{;k} = 0$, с заменой в их формулах (94,6) и (94,7) T_{ik} на $(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R)$

Краткий набросок такой.

Обозначим

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \ .$$

Тогда

$$\delta S_H = \varkappa \int G_{ik}(\eta^{k;i} + \eta^{i;k})\sqrt{-g}d^4x \ .$$

Из симметрии G_{ik}

$$\delta S_H = 2\varkappa \int G_{ik}\eta^{i;k}\sqrt{-g}d^4x \ .$$

После этого берём интеграл по частям (или выделяем дивергентный член). Поверхностной частью пренебрегаем как всегда (не забудем о возможных трудностях). Остаётся

$$\delta S_H = -2\varkappa \int G^{;k}_{ik}\eta^i\sqrt{-g}d^4x \ .$$

Что равно нулю для наших координатных возмущений и из произвольности η^i, поднимая и опуская индексы, мы получим

$$(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} = 0 \ .$$

Тогда из уравнений Эйнштейна сразу имеем $T^{ik}_{;k} = 0$, значит, уравнения Эйнштейна содержат не только уравнения поля, но и уравнения движения источников поля, что и требуется доказать.

2.3 Движение по геодезическим

Можно чисто механически проверить, что

$$(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} = 0 \ .$$

Это следствие так называемого тождества Бианки. В ЛЛ и в большинстве других учебников так и делается (хотя в ЛЛ ряд моментов в выкладках опущен). Отсюда и из (2) получаем $T^{ik}_{;k} = 0$.

Однако, как показано выше, условие $(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} = 0$ можно вывести более изящно из вариационного принципа. В этом выводе есть ряд поучительных моментов для понимания физики. Итак, примем условие $T^{ik}_{;k} = 0$. Чтобы не было логической путаницы, замечу, что ЛЛ выводят $T^{ik}_{;k} = 0$ в параграфе 94, предшествующем §95, где появляется (2), но там в §94, учитывается, что уравнения движения выполнены. А нам как раз надо доказать, что из (2) следуют уравнения движения.

Рассмотрим непрерывную среду с нулевым давлением $P = 0$. Фактически – это набор пылинок с гладким распределением скоростей (чтобы пылинки какое-то конечное время не сталкивались). Непрерывную среду рассматривать удобней, чем просто совокупность материальных точек: удаётся избежать введения дельта-функций от координат. В любом случае и сплошная среда, и материальная точка – это идеализации. Каждая отдельная 'жидкая' частица такой сплошной среды в гравитационном поле будет двигаться как свободная материальная точка в том же поле. Найдём закон этого движения.

Пусть координаты частицы x^i, а вектор скорости $u^i = dx^i/ds$ (4-вектор!). В сплошной среде, как мы условились, u^i образует гладкое векторное поле, причём из определения скорости

$$g_{ik}u^iu^k = 1 \ .$$

Возьмём ковариантную производную, помня, что $g_{ik;m} \equiv 0$ из предыдущих занятий,

$$0 = (g_{ik}u^iu^k)_{;m} = g_{ik}(u^i_{;m}u^k + u^iu^k_{;m}) = 2 \ g_{ik}u^iu^k_{;m} \ ,$$

откуда

$$u_ku^k_{;m} = 0 \ . \tag{6}$$

Эти свойства относятся к внутренним, чисто математическим свойствам вектора u^i, т.е. они верны при любом движении частиц. Чуть ниже рассмотрим свойства скорости при движении по геодезическим.

Элемент координатного объёма есть

$$d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 \ ,$$

а физического $dtdV = \sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3$. Пусть скалярное поле ρ определено так, что физическая плотность есть ρu^0, (тогда координатная плотность $\rho u^0\sqrt{-g}$), а поток массы – ρu^α ($\rho u^\alpha\sqrt{-g}$ соответственно), $\alpha = 1, 2, 3$. Подчеркну, что в отличие от многих авторов, я обозначаю через ρ только плотность массы (или, например, плотность барионного заряда), а не плотность энергии! Множитель u^0 без гравитации, это просто Лоренц-фактор. При наличии гравитации это ещё и замедление времени в гравитационном поле. Уравнение неразрывности, т.е. закон сохранения массы, который в ньютоновском случае был

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \ ,$$

теперь должно выглядеть как

$$(\rho u^k\sqrt{-g})_{,k} = 0 \ ,$$

а это эквивалентно ковариантной дивергенции в 4-мире:

$$(\rho u^k)_{;k} = 0 \ .$$

– можно просто показать, почему это так из свойств g (см. любой учебник по ОТО).

В этом случае естественна форма тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = \rho u^iu^k$$

– т.е. плотность энергии есть ρu^0u^0 (один множитель u^0 как 'Лоренц-фактор' в энергии каждой частицы, второй как в плотности), поток энергии ρu^0u^α, плотность импульса $\rho u^\alpha u^0$, поток импульса $\rho u^\alpha u^\beta$. Координатные плотности соответствуют $T^{ik}\sqrt{-g}$.

Посмотрим на закон 'сохранения' для T^{ik}:

$$T^{ik}_{;k} = 0 \ .$$

Я беру 'сохранения' в кавычки, так как этот закон не учитывает передачу энергии-импульса гравитационного поля веществу (см. ЛЛ и обширную литературу о псевдотензоре энергии-импульса гравитационного поля, который обеспечивает истинное сохранение).

Имеем
$$T^{ik}_{;k} = (\rho u^i u^k)_{;k} = u^i (\rho u^k)_{;k} + \rho u^k u^i_{;k} \ . \tag{7}$$
Первый член справа исчезает по закону сохранения массы $(\rho u^k)_{;k} = 0$. Разберёмся, что даёт второй член.

Там, где $\rho \neq 0$, т.е. во всей области, где задано поле скоростей, условие $T^{ik}_{;k} = 0$ даёт $u^k u^i_{;k} = u^i_{;k} u^k = 0$, т.е.
$$u^i_{;k} u^k = (\partial_k u^i + \Gamma^i_{jk} u^j) u^k = \partial_k u^i u^k + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0 \ . \tag{8}$$
Напишем 4-ускорение вдоль траектории частицы:
$$\grave{u}^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds} = \partial_k u^i u^k \ .$$
Здесь тонкое место – появление $\partial u^i / \partial x^k$ – чтобы иметь право взять производную по любой координате, нужно иметь поле скоростей в каждой точке пространства-времени, а не изолированные траектории. Согласно уравнению геодезической,
$$\grave{u}^i + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0 \ ,$$
и выражение (8) означает, что частицы движутся по геодезическим. Итак, зануление последнего члена в выражении (7) показывает, что в произвольном гравитационном поле g_{ab} частицы движутся по геодезическим! И обратно, если частицы движутся по геодезическим, то $T^{ik}_{;k} = 0$ и энергия-импульс ‘сохраняется’ при сохранении массы. Повторяю, берём ‘сохранение’ в кавычки, так как на самом деле сохраняться должны энергия-импульс не вещества, а вещества плюс гравитационное поле.

Но осталось ещё проверить закон сохранения массы.

Теперь мы имеем
$$T^{ik}_{;k} = (\rho u^i u^k)_{;k} = u^i (\rho u^k)_{;k} + \rho u^k u^i_{;k} = 0 \ . \tag{9}$$
т.е.
$$u^i (\rho u^k)_{;k} + \rho u^k u^i_{;k} = 0$$
– умножим на u_i. Второй член занулится из-за равенства $u_k u^k_{;m} = 0$ под номером (6), что в прошлый раз тривиально доказали (только заменим немое k на i). Остаётся $(\rho u^k)_{;k} = 0$ – закон сохранения массы.