Семинар по релятивистской астрофизике. 22 мая 2008

Рук. Блинников С.И.

Аннотация

С.Блинников. Вывод уравнения движения материальной точки по геодезической из условия зануления ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса

1 ‘Сохранение’ энергии-импульса и геодезические

Пока мы не нашли добровольца, который бы рассказал нам, как вывести уравнения Эйнштейна

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik} \qquad (1)$$

(например, из вариационного принципа Гильберта), но это можно посмотреть в учебниках (есть в ЛЛ, я посылал Хрипловича). Как мы поняли в прошлый раз на примерах Шварцшильда и Фридмана, связь вариационного принципа Гильберта с уравнениями Эйнштейна вовсе не тривиальна из-за внеинтегральных членов (см. Wald, посланный в прошлый раз). Поэтому реально не так уж нужно ‘выводить’ этот фундаментальнейший закон природы. Этот закон сумели открыть великие люди и его можно принять за постулат. А потом сравнивать его следствия с экспериментом.

Тут я хочу обсудить только одно важное следствие: движение пробных частиц по геодезическим. Для этого установим связь равенства
$T^{ik}_{;k} = 0$ с уравнениями Эйнштейна.

Можно чисто механически проверить, что

$$(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R)_{;k} = 0 \ .$$

Это следствие так называемого тождества Бианки. В ЛЛ и в большинстве других учебников так и делается (хотя в ЛЛ ряд моментов в выкладках опущен). Отсюда и из (1) получаем $T^{ik}_{;k} = 0$.

Однако, условие $(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R)_{;k} = 0$ можно вывести более изящно из вариационного принципа. В этом выводе есть ряд поучительных моментов для понимания физики. Попробуем сделать это в следующий раз, а пока примем условие $T^{ik}_{;k} = 0$ на веру. Чтобы не было логической путаницы, замечу, что ЛЛ выводят $T^{ik}_{;k} = 0$ в параграфе 94, предшествующем §95, где появляется (1), но там в §94, учитывается, что уравнения движения выполнены. А нам как раз надо доказать, что из (1) следуют уравнения движения.

Рассмотрим непрерывную среду с нулевым давлением $P = 0$. Фактически – это набор пылинок с гладким распределением скоростей (чтобы пылинки какое-то конечное время не сталкивались). Непрерывную среду рассматривать удобней, чем просто совокупность материальных точек: удаётся избежать введения дельта-функций от координат. В любом случае и сплошная среда, и материальная точка – это идеализации. Каждая отдельная ‘жидкая’ частица такой сплошной среды в гравитационном поле будет двигаться как свободная материальная точка в том же поле. Найдём закон этого движения.

Пусть координаты частицы x^i, а вектор скорости $u^i = dx^i/ds$ (4-вектор!). В сплошной среде, как мы условились, u^i образует гладкое векторное поле, причём из определения скорости

$$g_{ik}u^iu^k = 1 \ .$$

Возьмём ковариантную производную, помня, что $g_{ik;m} \equiv 0$ из предыдущих занятий,

$$0 = (g_{ik}u^iu^k)_{;m} = g_{ik}(u^i_{;m}u^k + u^iu^k_{;m}) = 2 \ g_{ik}u^iu^k_{;m} \ ,$$

откуда

$$u_ku^k_{;m} = 0 \ . \tag{2}$$

Эти свойства относятся к внутренним, чисто математическим свойствам вектора u^i, т.е. они верны при любом движении частиц. Чуть ниже рассмотрим свойства скорости при движении по геодезическим.

Элемент координатного объёма есть

$$d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 \ ,$$

а физического $dtdV = \sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3$. Пусть скалярное поле ρ определено так, что физическая плотность есть ρu^0, (тогда координатная плотность $\rho u^0\sqrt{-g}$), а поток массы – ρu^α ($\rho u^\alpha\sqrt{-g}$ соответственно), $\alpha = 1, 2, 3$. Подчеркну, что в отличие от многих авторов, я обозначаю через ρ только плотность массы (или, например, плотность барионного заряда), а не плотность энергии! Множитель u^0 без гравитации, это просто Лоренц-фактор. При наличии гравитации это ещё и замедление времени в гравитационном поле. Уравнение неразрывности, т.е. закон сохранения массы, который в ньютоновском случае был

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \ ,$$

теперь должно выглядеть как

$$(\rho u^k\sqrt{-g})_{,k} = 0 \ ,$$

а это эквивалентно ковариантной дивергенции в 4-мире:

$$(\rho u^k)_{;k} = 0 \ .$$

– можно просто показать, почему это так из свойств g (см. любой учебник по ОТО).

В этом случае естественна форма тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = \rho u^iu^k$$

– т.е. плотность энергии есть ρu^0u^0 (один множитель u^0 как ‘Лоренц-фактор’ в энергии каждой частицы, второй как в плотности), поток энергии ρu^0u^α, плотность импульса $\rho u^\alpha u^0$, поток импульса $\rho u^\alpha u^\beta$. Координатные плотности соответствуют $T^{ik}\sqrt{-g}$.

Посмотрим на закон ‘сохранения’ для T^{ik}:

$$T^{ik}_{;k} = 0 \ .$$

Я беру ‘сохранения’ в кавычки, так как этот закон не учитывает передачу энергии-импульса гравитационного поля веществу (см. ЛЛ и обширную литературу о псевдотензоре энергии-импульса гравитационного поля, который обеспечивает истинное сохранение).

Имеем

$$T^{ik}_{;k} = (\rho u^iu^k)_{;k} = u^i(\rho u^k)_{;k} + \rho u^ku^i_{;k} \ . \tag{3}$$

Первый член справа исчезает по закону сохранения массы $(\rho u^k)_{;k} = 0$. Разберёмся, что даёт второй член.

Там, где $\rho \neq 0$, т.е. во всей области, где задано поле скоростей, условие $T^{ik}_{;k} = 0$ даёт $u^k u^i_{;k} = u^i_{;k} u^k = 0$, т.е.

$$u^i_{;k} u^k = (\partial_k u^i + \Gamma^i_{jk} u^j) u^k = \partial_k u^i u^k + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0 \ . \tag{4}$$

Напишем 4-ускорение вдоль траектории частицы:

$$\grave{u}^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds} = \partial_k u^i u^k \ .$$

Здесь тонкое место – появление $\partial u^i / \partial x^k$ – чтобы иметь право взять производную по любой координате, нужно иметь поле скоростей в каждой точке пространства-времени, а не изолированные траектории. Согласно уравнению геодезической,

$$\grave{u}^i + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0 \ ,$$

и выражение (4) означает, что частицы движутся по геодезическим. Итак, зануление последнего члена в выражении (3) показывает, что в произвольном гравитационном поле g_{ab} частицы движутся по геодезическим! И обратно, если частицы движутся по геодезическим, то $T^{ik}_{;k} = 0$ и энергия-импульс ‘сохраняется’ при сохранении массы. Повторяю, берём ‘сохранение’ в кавычки, так как на самом деле сохраняться должны энергия-импульс не вещества, а вещества плюс гравитационное поле.

Нам остаётся показать, что $T^{ik}_{;k} = 0$ следует из уравнений Эйнштейна.

Итак выведем соотношение $(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R)_{;k} = 0$ из вариационного принципа.

Возьмём малое возмущение координат

$$\tilde{x}^i = x^i + \eta^i \ .$$

По общей формуле преобразования тензоров

$$\tilde{g}^{ik}(\tilde{x}) = g^{mn}(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^n} \approx g^{ik}(x) + g^{im} \frac{\partial \eta^k}{\partial x^m} + g^{km} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^m} \ .$$

Также с точностью первого порядка по возмущению

$$\tilde{g}^{ik}(\tilde{x}) = \tilde{g}^{ik}(x) + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n} \eta^n \ ,$$

и вариацию g^{ik} (при одном значении аргумента x) можно записать так:

$$\tilde{g}^{ik}(x) - g^{ik}(x) = \delta g^{ik}(x) = g^{im} \frac{\partial \eta^k}{\partial x^m} + g^{km} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^m} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n} \eta^n \ .$$

Выразим частные производные по x через ковариантные:

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x^m} = \partial_m \eta^k = \eta^k_{;m} - \Gamma^k_{nm} \eta^n = \eta^k_{;m} - \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{nm}) \eta^n \ ,$$

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial x^m} = \partial_m \eta^i = \eta^i_{;m} - \Gamma^i_{nm} \eta^n = \eta^i_{;m} - \frac{1}{2} g^{li} (\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{nm}) \eta^n \ ,$$

Домножим обе строки на g^{im}, g^{km} и сложим:

$$g^{im} \eta^k_{;m} - \frac{1}{2} g^{im} g^{lk} (\underline{\partial_m g_{nl}} + \partial_n g_{ml} - \utilde{\partial_l g_{nm}}) \eta^n$$

$$+ g^{km} \eta^i_{;m} - \frac{1}{2} g^{km} g^{li} (\utilde{\partial_m g_{nl}} + \partial_n g_{ml} - \underline{\partial_l g_{nm}}) \eta^n \ ,$$

одинаково подчёркнутые члены можно сократить, заменяя немые индексы $m \rightleftarrows l$. Тогда получим

$$g^{im}\eta^k_{;m} - \frac{1}{2}g^{im}g^{lk}(\partial_n g_{ml})\eta^n + g^{km}\eta^i_{;m} - \frac{1}{2}g^{km}g^{li}(\partial_n g_{ml})\eta^n \ ,$$

и, опять меняя в последнем члене $m \rightleftarrows l$,

$$g^{im}\eta^k_{;m} - g^{im}g^{lk}(\partial_n g_{ml})\eta^n + g^{km}\eta^i_{;m} \ . \tag{5}$$

Из того, что g^{ab} является обратной матрицей к g_{ab},

$$g_{il}g^{lm} = \delta^m_i \ ,$$

имеем

$$(\partial_k g_{il})g^{lm} + g_{il}(\partial_k g^{lm}) = 0 \ ,$$

т.е.

$$g^{lm}(\partial_k g_{il}) = -g_{il}(\partial_k g^{lm}) \ .$$

Значит в (5),

$$g^{lk}(\partial_n g_{ml}) = -g_{ml}(\partial_n g^{lk}) \ ,$$

а

$$g^{im}g^{lk}(\partial_n g_{ml}) = -g^{im}g_{ml}(\partial_n g^{lk}) = -\delta^i_l \partial_n g^{lk} = -\partial_n g^{ik} \ ,$$

откуда

$$\partial_m \eta^k + \partial_m \eta^i = g^{im}\eta^k_{;m} + g^{km}\eta^i_{;m} + \partial_n g^{ik}\eta^n \ .$$

и

$$\delta g^{ik} = \partial_m \eta^k + \partial_m \eta^i - \partial_n g^{ik}\eta^n = g^{im}\eta^k_{;m} + g^{km}\eta^i_{;m} = \eta^{k;i} + \eta^{i;k} \ .$$

Это и есть наш главный результат сегодня:

$$\delta g^{ik} = \eta^{k;i} + \eta^{i;k} \ . \tag{6}$$

Опять же из определения обратной матрицы $g_{il}g^{lm} = \delta^m_i$ имеем

$$\delta g_{ik} = -\eta_{k;i} - \eta_{i;k} \ . \tag{7}$$

Если у нас при таких возмущениях получается $\delta g_{ik} = 0$, то уравнения $\eta_{k;i} + \eta_{i;k} = 0$ определяют векторное поле, которое называют вектором Киллинга. Про них и про связь с производной Ли смотри вложения.

В стандартных учебниках показывают, что вариация действия Гильберта для гравитационного поля при вариации метрики есть

$$\delta S_H = \varkappa \int (R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d^4x \ .$$

Подставив сюда $\delta g^{ik} = \eta^{k;i} + \eta^{i;k}$ для специального класса возмущений, которые мы только что рассмотрели, получим $\delta S_H = 0$, так как S_H есть скаляр и от преобразования координат никак не должен меняться. Повторив все рассуждения из параграфа ЛЛ о тензоре энергии-импульса в гравитации (в издании 1967 г. это §94), где они получили $T^{ik}_{;k} = 0$, с заменой в их формулах (94,6) и (94,7) T_{ik} на $(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R)$

Краткий набросок такой.

Обозначим

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \ .$$

Тогда
$$\delta S_H = \varkappa \int G_{ik}(\eta^{k;i} + \eta^{i;k})\sqrt{-g}d^4x \ .$$
Из симметрии G_{ik}
$$\delta S_H = 2\varkappa \int G_{ik}\eta^{i;k}\sqrt{-g}d^4x \ .$$
После этого берём интеграл по частям (или выделяем дивергентный член). Поверхностной частью пренебрегаем как всегда (не забудем о возможных трудностях). Остаётся
$$\delta S_H = -2\varkappa \int G_{ik}^{;k}\eta^{i}\sqrt{-g}d^4x \ .$$
Что равно нулю для наших координатных возмущений и из произвольности η^i, поднимая и опуская индексы, мы получим
$$(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k} = 0 \ .$$
Тогда из уравнений Эйнштейна сразу имеем $T^{ik}_{;k} = 0$, значит, уравнения Эйнштейна содержат не только уравнения поля, но и уравнения движения источников поля, что и требуется доказать.

Но осталось ещё проверить закон сохранения массы.

Теперь мы имеем
$$T^{ik}_{;k} = (\rho u^i u^k)_{;k} = u^i(\rho u^k)_{;k} + \rho u^k u^i_{;k} = 0 \ . \tag{8}$$
т.е.
$$u^i(\rho u^k)_{;k} + \rho u^k u^i_{;k} = 0$$
– умножим на u_i. Второй член занулится из-за равенства $u_k u^k_{;m} = 0$ под номером (2), что в прошлый раз тривиально доказали (только заменим немое k на i). Остаётся $(\rho u^k)_{;k} = 0$ – закон сохранения массы.

2 Сливающиеся нейтронные звёзды

Предыдущее доказательство движения пробных частиц по геодезическим принадлежит, по-видимому, П.Дираку. В.А.Фок с сотрудниками провёл большую работу о выводе уравнений движения из ОТО для тел конечных размеров (метод Фока для островного расположения масс). Современные машинные расчёты позволяют во всех деталях изучать движения релятивистских звёзд в ОТО, даже с учётом излучения гравитационных волн, см. заметку ниже.

Accurate evolutions of inspiralling neutron-star binaries: prompt and delayed collapse to black hole

Authors: Luca Baiotti, Bruno Giacomazzo, Luciano Rezzolla

(Submitted on 3 Apr 2008)

Abstract: Binary neutron-star (BNS) systems represent primary sources for the gravitational-wave (GW) detectors. We present a systematic investigation in full GR of the dynamics and GW emission from BNS which inspiral and merge, producing a black hole (BH) surrounded by a torus. Our results represent the state of the art from several points of view: (i) We use HRSC methods for the hydrodynamics equations and high-order finite-differencing techniques for the Einstein equations; (ii) We employ AMR techniques with "moving boxes"; (iii) We use as initial data BNSs in irrotational quasi-circular orbits; (iv) We exploit the isolated-horizon formalism to measure the properties of the BHs produced in the merger; (v) Finally, we use two approaches, based either on gauge-invariant perturbations or on Weyl scalars, to calculate the GWs. These techniques allow us to perform accurate evolutions on timescales never reported before (ie 30 ms) and to provide the first complete description of the inspiral and merger of a BNS leading to the prompt or delayed formation of a BH and to its ringdown. We consider either a polytropic or an ideal fluid EOS and show that already with this idealized EOSs a very interesting phenomenology emerges. In particular, we show that while high-mass binaries lead to the prompt formation of a rapidly rotating BH surrounded by a dense torus, lower-mass binaries give rise to a differentially rotating NS, which undergoes large oscillations and emits large amounts of GWs. Eventually, also the NS collapses to a rotating BH surrounded by a torus. Finally, we also show that the use of a non-isentropic EOS leads to significantly different evolutions, giving rise to a delayed collapse also with high-mass binaries, as well as to a more intense emission of GWs and to a geometrically thicker torus.

Comments: 33 pages, 29 figures, submitted to Phys. Rev. D; high-resolution figures and animations can be found at this http URL
`numrel.aei.mpg.de/Visualisations/Archive/BinaryNeutronStars/Relativistic_Meudon/index.html` — ссылка, похоже уже, не работает.

Subjects: General Relativity and Quantum Cosmology (gr-qc); Astrophysics (astro-ph)

Cite as: arXiv:0804.0594v1 [gr-qc]