Семинар по релятивистской астрофизике. 24 апреля 2008

Рук. Блинников С.И.

13 мая 2008 г.

Аннотация

Добавлено рассуждение об излишности теоремы Стокса при выводе тензора Римана.

Вывод решений для метрик Шварцшильда и Фридмана из вариационного принципа Гильберта.

Приложены отрывки из учебников с обычным и с более корректным обращением с внеинтегральными членами при работе с вариационным принципом Гильберта.

1 Добавка к введению тензора кривизны

Мы писали для компонент вектора A_k и площадки Δf^{lm}

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \, \Delta f^{lm},$$

где R^i_{klm} – тензор кривизны.
При параллельном переносе $DA_k = 0$, тогда координатные компоненты A_k меняются на

$$\delta A_k = \Gamma^i_{km} A_i dx^m \ ,$$

откуда

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma^i_{km} A_i dx^m \ .$$

Дальше я сослался на стандартные учебники, которые сводят контурный интеграл к интегралу по площадке Δf^{lm} через теорему Стокса, откуда получается

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \ .$$

См. одно из вложений в моём сегодняшнем письме. Там из книги Рудина дан полный вывод обобщённой теоремы Стокса

$$\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega$$

– это формула (100) у Рудина: интеграл по области Ψ в m-мерном пространстве от внешней (или косой) производной формы ω равен интегралу по краю этой области от самой формы ω.
Этот аппарат, конечно, очень мощный: он содержит в себе и формулы Гаусса-Остроградского, и Грина, и Стокса. Как всегда, первым формулу:

$$\int\int_{\Psi} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \int_{\partial\Psi} [Pdx + Qdy]$$

(здесь $m = 2$) вывел Эйлер в 18-м веке, а не Грин в 19-м (1828).
На самом деле, если подумать, то реально теорема Стокса не нужна. По большой (конечной) площадке интеграл от вектора или тензора в кривом мире всё равно не определить. Вектора надо сносить в одну точку для суммирования параллельно самим себе, а тогда конечные компоненты вектора зависят от пути, если кривизна не равна нулю, и сумма не определена.
Как же тут быть? На самом деле, всё что надо от теоремы Стокса, которая в одномерном случае есть просто основная теорема анализа (Ньютона-Лейбница), — это элементарное положение, из которого она выводится. При малых Δx всегда имеем

$$f(x + \Delta x) - f(x) \simeq \frac{df}{dx}\Delta x \ .$$

Собирая большой отрезок x из набора малых Δx мы и приходим к теореме Ньютона-Лейбница о равенстве интеграла от функции на отрезке разности значений её первообразной на концах отрезка. Так же строится и вывод обобщённой теоремы Стокса.
Нас же реально волнует не интеграл по большому многообразию Ψ, а сумма по малой площадке Δf^{lm} и всё надо делать сразу в первом порядке по $dx^i \simeq \Delta x^i$. Тогда всё получается, как надо. Если будет время и желание, ещё обсудим.

2 Вывод решения Шварцшильда

Let us get the Schwarzschild metric from Hilbert action (Weyl 1917; see also the book by Utiyama, but I will do this even in a simpler way). Сейчас появилась книжка И.Хрипловича (см. одно из вложений в почте, файл типа `djvu`, где делается похоже на Вейля. Ищем решение в виде

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(r)}dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \ . \tag{1}$$

Here units are $c = 1$. With this metric one can compute all Γ^i_{km}, Riemann and Ricci tensors etc. This is purely mechanical work and one can allow a computer with `Maple` or `Mathematica` to do this (or one can just look into LL and do this by hand). What we need is only **one** scalar. My computer gave me:

$$R = \left[-r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\nu(r) \right) - \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\nu(r) \right)^2 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\nu(r) \right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\lambda(r) \right) \right.$$
$$\left. -2\left(\frac{\partial}{\partial r}\nu(r) \right) r + 2\left(\frac{\partial}{\partial r}\lambda(r) \right) r + 2\mathrm{e}^{\lambda(r)} - 2 \right] \Big/ (r^2\,\mathrm{e}^{\lambda(r)})$$

Если проделать вручную и сравнить с ЛЛ или Вихлининым, то сразу видно, что ответ Мапла (`Maple`) правильный, только знак R другой. Такое определение там принято. Знаки тензоров Римана, Риччи и т.п. гуляют от книги к книге, следить надо внимательно. Правда, для вакуумных решений знак R неважен.
Обозначая $\nu' \equiv \partial_r \nu$, $\nu'' \equiv \partial_r^2 \nu$ и т.п., можно R уже с "нашим" знаком записать так:

$$R = \left[r^2\nu'' + ({}^1\!/_2) r^2 (\nu')^2 - ({}^1\!/_2) r^2 \nu'\lambda' + 2\nu' r - 2\lambda' r - 2\mathrm{e}^{\lambda} + 2 \right] \Big/ (r^2\,\mathrm{e}^{\lambda})$$

или

$$R = \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\nu'' + ({}^1\!/_2)(\nu')^2 - ({}^1\!/_2)\nu'\lambda' + 2(\nu' - \lambda')/r + 2/r^2 \right] - 2/r^2$$

Мы найдём решение из вариационного принципа $\delta S_H = 0$ для действия S_H с лагранжианом

$$\mathcal{L}_H = \varkappa\sqrt{-g}R \ .$$

(Скоро убедимся, что $\varkappa = c^3/16\pi G$.) Действие есть

$$S_H = \int \mathcal{L}_H d^4x = \varkappa \int R\sqrt{-g}d^4x \ .$$

Важно понимать, что d^4x здесь уже элемент координатного объёма, а не физического, т.е. в нашем случае в метрике (1) $d^4x = dt dr d\theta d\varphi$.

Из (1) очевидно, чему равен g – определитель матрицы g_{ik}: имеем

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\mathrm{e}^{(\nu(r)+\lambda(r))}\, r^4 \sin^2(\theta)} = \mathrm{e}^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \sin\theta.$$

Умножение d^4x на $\sqrt{-g}$ и делает объём физическим.
Итак, умножим R на этот $\sqrt{-g}$ и получим

$$L[\nu(r),\lambda(r)] = \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 \left[\nu'' + ({}^1\!/_2)\,(\nu')^2 - ({}^1\!/_2)\nu'\lambda' + 2(\nu'-\lambda')/r + 2/r^2\right] - 2\mathrm{e}^{\frac{\nu+\lambda}{2}}$$

Здесь мы взяли только ту часть $\mathcal{L}_H$, которая зависит от r, и уже больше не пишем $\sin\theta$, так как ищем функции ν и λ, которые по предположению зависят только от r. И действие оставим уже в виде одномерного интеграла по dr, а именно, $\int L[\nu(r),\lambda(r)]dr$. Общая проблема с гильбертовым действием, — это наличие вторых производных в лагранжиане, здесь $\nu'' \equiv \partial_r^2\nu$. Но мы можем легко взять

$$\int \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 \nu'' dr$$

по частям:

$$\int \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 \nu'' dr = \int \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 d\nu' = \nu' \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2|_a^b - \int \nu' d\left(\mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2\right) =$$

$$\nu' \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2|_a^b - \int \nu' \mathrm{e}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} r^2 + 2r\right) dr\ ,$$

первые 3 члена из L исчезают, и интеграл для R в той части, что берётся по dr, упрощается (если отбросить внеинтегральный член) до

$$\int L[\nu(r),\lambda(r)]dr = \int 2\mathrm{e}^{\frac{\nu+\lambda}{2}} [(1-\lambda' r)\mathrm{e}^{-\lambda} - 1] dr.$$

We can write down ELE for this L already and find the solution for ν and λ in a couple of minutes, but a more elegant way is to note that the term in square brackets is just $-(r - r\mathrm{e}^{-\lambda})'$, so we have

$$L = L(f,h) = 2fh', \quad f \equiv \mathrm{e}^{\frac{\nu+\lambda}{2}}, \quad h \equiv -(r - r\mathrm{e}^{-\lambda}),$$

and from ELE we get immediately

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial L}{\partial h'} = 0 \ \Rightarrow f' = 0 \ \Rightarrow \nu' + \lambda' = 0.$$

This means $\nu = -\lambda + \text{const}$, but for $r = \infty$ we need $\nu = \lambda = 0$, hence const=0. The second ELE (since L does not depend on f'):

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 0 \ \Rightarrow h' = 0 \ \Rightarrow h = \text{const} \Rightarrow \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{\text{const}}{r}$$

and we know already that here const$= r_g = 2GM = 2GM/c^2$. Так как на бесконечности $g_{00} \to 1 + 2\phi = 1 - 2GM/r$.
Thus we found the Schwarzschild metric,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)\,.$$

Не забудем позже обсудить проблему внеинтегрального члена. Его не так-то просто отбросить...

3 Космология

В самых простых моделях плотность материи во Вселенной приближённо полагают однородной и равной средней плотности в некотором большом объёме, скажем больше ($\sim 100\,\text{Мпк})^3$. Это предположение об однородности - всюду по всему пространству, и изотропии в каждом направлении - называется *космологическим принципом.* Насколько это справедливо? Изображение большой части неба, приблизительно 30 градусов в поперечнике, почти с миллионом галактик до расстояния $\sim$ 600 Мпк показывает более или менее одну и ту же плотность галактик всюду.
В отличие от этого, карта всего неба для самых близких полутора тысяч галактик (они находятся ближе нескольких десятков Мпк) показывает распределение, которое совершенно не однородно. Другая проблема состоит в том, что средняя плотность видимой материи может зависеть от объёма, по которому мы усредняем, то есть она может быть распределена как во фрактале. Но известно, что невидимая, тёмный материя доминирует в больших масштабах, и она должна быть однородна (иначе, невозможно согласовать это с изотропией реликтового 3°K микроволнового фона). Хотя микроволновый фон не совершенно изотропен, отклонения составляют порядка 10−5 или меньше. Мы можем заключить, что предположение об однородности справедливо, если мы хотим описать поведение Вселенной, усреднённой на крупном масштабе, где "крупный масштаб" означает "по расстояниям, больше чем сто Мпк".
Есть различие между изотропией и однородностью. *Изотропия* означает, что пространство выглядит одинаково независимо от направления луча обзора наблюдателя, расположенного в некоторой точке.

Однородность означает, что Вселенная одинакова всюду по пространству. Пространство может быть изотропным вокруг точки, не будучи однородным (например конус, который является изотропным вокруг его вершины, но конечно не однородным). Но если пространство изотропно *всюду*, тогда оно однородно.

В 1912 г. Vesto Slipher наблюдал спектры галактик в Обсерватории Лоуэлла во Флагштоке, Аризоне. Он сделал замечательное открытие: спектральные линии большинства галактик сдвинуты в красную сторону спектра, указывая, что галактики удаляются от Млечного Пути. (Это не так для соседних галактик, например гигантская спираль M31 в Андромеде фактически двигается к нам.) В 1929 г. Эдвин Хаббл, работавший на новом 2.4-м телескопе на Mt.Wilson, неподалёку от Лос-Анджелеса, сделал ещё более замечательное открытие.

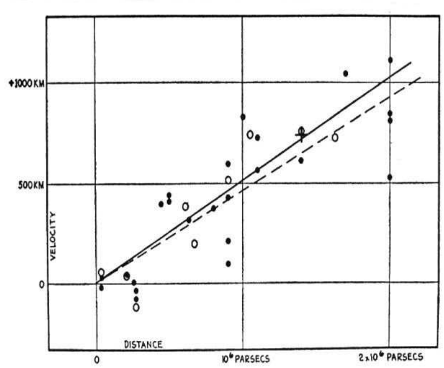

Fig. 9. *The Formulation of the Velocity-Distance Relation.*

Он впервые сумел оценить расстояния до галактик и получил график скоростей удаления галактик u (выведенных из красных смещений z) в функции их предполагаемых расстояний d. См. справа оригинальный рисунок из статьи Хаббла (там он неправильно написал размерность скорости в км, вместо км/с). Теперь график такого типа называют диаграммой Хаббла.

Подгоняя прямую линию к данным, он получил так называемый Закон Хаббла:

$$u = H_0 d \ . \tag{2}$$

Следует помнить, что в кривом мире относительная скорость двух удалённых объектов u неопределённа, поэтому следовало бы писать вместо этого

$$z = \frac{\lambda - \lambda_{\rm lab}}{\lambda_{\rm lab}} = \frac{H_0 d}{c}.$$

Здесь λ – наблюдаемое значение длины волны некоторой детали в спектре объекта, а $\lambda_{\rm lab}$ – лабораторное значение для той же детали.

Когда Хаббл обнаружил соотношение $u = H_0 d$, он не имел надёжного способа измерить расстояния d до галактик. Он только предположил зависимость расстояния d от размеров и яркости галактик, причём недооценил фактические значения d почти в 10 раз. Именно поэтому он завысил значение H_0, получив 500 км/с/Мпк — т.е. на порядок вы-

ше по сравнению с современными данными (сейчас принято $H_0 \approx 70$ км/с/Мпк), тем не менее, факт роста красного смещения с расстоянием был установлен верно. Этот факт называют разбеганием масс светящегося вещества (галактик и их скоплений), интерпретируя z как проявление доплер-эффекта ($z = u/c$ при $u \ll c$ и $u = H_0 d$).
Чтобы найти постоянную Хаббла, нужно измерить и красные смещения, и расстояния многих отдалённых галактик. Красные смещения спектральных линий можно измерять с точностью порядка процента (хуже для удалённых слабых объектов и лучше для близких и ярких). Трудная задача – найти расстояния. Несколько десятков лет назад неопределённость в расстояниях до галактик была приблизительно в два раза; сейчас считают, что астрономы могут измерить расстояния с точностью до $\pm 15\%$, и что H_0 находится в диапазоне 57 - 73 км/с/Мпк.

4 Вселенная Фридмана

Таким образом Вселенная очевидно не стационарна, она изменяется со временем. Теоретически гораздо раньше Хаббла нестационарность Вселенной была предсказана А.А.Фридманом (1922, 1924). Он создал первые космологические модели ОТО для Вселенной с материей, однородной и изотропной в пространстве, но не статической во времени. Логику Фридмана можно проследить следующим путём.
Мы видели что метрика $d\ell^2 = a^2(d\theta^2 + \theta^2\, d\varphi^2)$ описывает плоское двумерное пространство. Можно проверить, что все компоненты тензора кривизны $R^i_{klm} = 0$, или просто преобразовать к $d\ell^2 = dx^2 + dy^2$. (Просто здесь полярный радиус обозначен буквами $a\theta$ вместо привычного r.)
Двумерная сфера с метрикой $d\ell^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$ искривлена, но поскольку она является поверхностью шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, где

$$\begin{aligned} z &= a\cos\theta \\ y &= a\sin\theta\cos\varphi \\ x &= a\sin\theta\sin\varphi\ , \end{aligned}$$

очевидно, что она изотропна и однородна, точно так же, как двумерная (*2D*) плоскость, метрику которой мы записывали как $d\ell^2 = a^2(d\theta^2 + \theta^2\, d\varphi^2)$.
Теперь, если взять плоское *3D*-пространство с метрикой

$$d\ell^2 = da^2 + a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\ ,$$

и заменить её на

$$d\ell^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]\ , \qquad (3)$$

то, по аналогии с *2D*-сферой, мы получим изотропное и однородное *3D*-пространство — поверхность *4D*-шара

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2 ,$$

где

$$\begin{aligned} w &= a\cos\chi \\ z &= a\sin\chi\cos\theta \\ y &= a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \\ x &= a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

причём a будет 'радиусом кривизны' *3D*-сферы. По аналогии с этим выражением можно добавлять новые координаты в N-мерном пространстве.
Если для *4D* пространства-времени (*мира*) написать $ds^2 = c^2dt^2 - d\ell^2$, где $d\ell^2$ взято из (3), то получим метрику мира в виде, открытом Фридманом и использовавшимся в "Теории поля" Ландау и Лифшица (ниже ЛЛ) для изложения космологии:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\; d\varphi^2)] \; .$$

Несколько иной вид получается при замене $\sin\chi = r$, тогда $d\chi^2 = dr^2/(1-r^2)$, и можно записать интервал в виде (вводя $k=1$)

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right].$$

(Заметим, что r здесь безразмерно!) Это форма метрики Фридмана в записи Робертсона–Уокера (**Robertson-Walker**). При $k=1$ имеем замкнутый мир Фридмана (с положительной кривизной *3D*-пространства конечного объема), причем $0 \le r < 1$, а при $k=0$ — *4D*-мир с плоским *3D*-пространством, когда $0 \le r < \infty$. В последнем случае $a(t)$ теряет смысл радиуса кривизны, поэтому для всех вариантов его лучше называть *масштабным фактором.*
Легко проверить, что $k=-1$ даёт ещё один мир с отрицательной кривизной *3D*-пространства с геометрией Лобачевского. Он получается из (3) заменой $\sin\chi \to \operatorname{sh}\chi$. Во всех этих случаях точка $r=0$ может быть выбрана совершенно произвольно в однородном пространстве, как и полюс на однородной *2D*-сфере. Будем считать скопления галактик точками с фиксированными значениями r, θ, φ, т.е. пусть эти координаты являются сопутствующими, а расширение Вселенной определяется масштабным

фактором $a(t)$. Строго говоря, по современным данным лучше считать "неподвижными" точками в сопутствующих координатах не галактики, а центры масс скоплений галактик, так как последние могут двигаться внутри скоплений с пекулярными скоростями порядка 1000 км/с.

Фридман сделал гораздо больше простых преобразований координат. Он показал (причём с учётом возможности ненулевого Λ-члена), что все варианты рассмотренных им метрик могут давать точные решения уравнений Эйнштейна при разумном выборе уравнения состояния вещества. Необходимо только определить поведение масштабного фактора $a(t)$ нестационарного мира с учётом этого уравнения состояния. И мы сделаем это снова из действия Гильберта, а потом сравним с выводом из уравнений Эйнштейна.

4.1 Пример, кристоффели для метрики FRW: `Maple`

$$\Gamma^n_{ik} \equiv g^{mn}\Gamma_{mik} \equiv \frac{1}{2}g^{mn}(\partial_k g_{im} + \partial_i g_{km} - \partial_m g_{ik}) \ , \tag{4}$$

Формула (4) позволяет вычислять кристоффели механически. Посмотрим, как это делает компьютер в системе `Maple` на примере метрики FRW. А потом покажем, как это сделать вручную (но с умом).

К сожалению, `Maple` требует, чтобы значения индексов тензора нумеровались с единицы. Поэтому назовём время 4-й координатой (вместо нулевой).

Вводим координаты.

```
> coords:=[r, theta, phi, t]:
```

Определяем метрику.

```
> g:=array (symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
> g[4,4]:=1: g[1,1]:=-a(t)^2/(1-k*r^2): g[2,2]:=-a(t)^2*r^2:
> g[3,3]:=-a(t)^2*r^2*sin(theta)^2:
> metric:=create([-1,-1], eval(g));
```

$metric :=$

$$\mathrm{table}([index\_char = [-1, -1],\ compts = \begin{bmatrix} -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2\,r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2\,r^2\sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}])$$

Запускаем команду на вычисление всех тензоров ОТО (= GR = General Relativity).

```
> tensorsGR(coords,metric,contra_metric,det_met, C1, C2, Rm,
Rc, R,
> G,
> C):
> displayGR(detmetric,det_met);
```

Получаем определитель метрики $g \equiv det(g_{ik})$.

$$\textit{Determinant of the covariant metric tensor}\ :$$

$$detg = \frac{a(t)^6\, r^4 \sin(\theta)^2}{-1 + k\, r^2}$$

До этого момента всё тривиально. Мы хотя бы убеждаемся, что `Maple` работает. И, наконец, выводим символы Кристоффеля.

```
> displayGR(Christoffel2,C2);
```

$$\textit{The Christoffel Symbols of the Second Kind}$$

$$non - zero\ components\ :$$

$$\{1, 11\} = -\frac{k\, r}{-1 + k\, r^2}$$

$$\{1, 14\} = \frac{\frac{d}{dt}\, a(t)}{a(t)}$$

$$\{1, 22\} = (-1 + k\, r^2)\, r$$

$$\{1, 33\} = (-1 + k\, r^2)\, r \sin(\theta)^2$$

$$\{2, 12\} = \frac{1}{r}$$

$$\{2, 24\} = \frac{\frac{d}{dt}\, a(t)}{a(t)}$$

$$\{2, 33\} = -\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\{3, 13\} = \frac{1}{r}$$

$$\{3, 23\} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\{3, 34\} = \frac{\frac{d}{dt}\, a(t)}{a(t)}$$

$$\{4, 11\} = -\frac{a(t)\, (\frac{d}{dt}\, a(t))}{-1 + k\, r^2}$$

$$\{4, 22\} = a(t)\, r^2\, (\tfrac{d}{dt}\, a(t))$$

$$\{4, 33\} = a(t)\, r^2 \sin(\theta)^2\, (\tfrac{d}{dt}\, a(t))$$

4.2 Пример, кристоффели для метрики FRW: с умом

Геодезический лагранжиан:

$$L_s = (\grave{t}\,)^2 - a^2(t)\left[\frac{\grave{r}^{\,2}}{1-kr^2} + r^2(\grave{\theta}^{\,2} + \sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2})\right],$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа (ELE) для этого L_s по t:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{t}}\right) - \frac{\partial L_s}{\partial t} = 0$$

т.е.

$$2\grave{\grave{t}} + 2a\dot{a}\left[\frac{\grave{r}^{\,2}}{1-kr^2} + r^2(\grave{\theta}^{\,2} + \sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2})\right] = 0$$

и

$$\grave{\grave{t}} + a\dot{a}\left[\frac{\grave{r}^{\,2}}{1-kr^2} + r^2(\grave{\theta}^{\,2} + \sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2})\right] = 0\ .$$

Из этих выражений можно просто считывать ненулевые Γ^n_{ik}, пользуясь уравнением геодезической (**??**). Например, Γ^0_{11} есть коэффициент при $\grave{r}^{\,2}$, т.е.

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2},$$

$$\Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2\ ,$$

$$\Gamma^0_{33} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta\ .$$

Видно, что эти выражения совпадают с формулами $\{4, 11\}$, $\{4, 22\}$, $\{4, 33\}$, полученными `Maple`'ом, который пользуется другим (вообще-то устаревшим) обозначением кристоффелей.

Уравнения Эйлера-Лагранжа (ELE) по r:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{r}}\right) - \frac{\partial L_s}{\partial r} = 0\ .$$

Сначала получим

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{r}}\right) = -\frac{2a^2\grave{\grave{r}}}{1-kr^2} - \frac{4a\dot{a}\grave{r}\,\grave{t}}{1-kr^2} - \frac{4a^2kr(\grave{r}\,)^2}{(1-kr^2)^2}\ ,$$

потом

$$\frac{\partial L_s}{\partial r} = -\frac{2a^2kr(\grave{r}\,)^2}{(1-kr^2)^2} - 2a^2r\grave{\theta}^{\,2} - 2a^2r\sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2}\ .$$

т.е.

$$-\frac{a^2\grave{\grave{r}}}{1-kr^2} - \frac{2a\dot{a}\grave{r}\,\grave{t}}{1-kr^2} - \frac{a^2kr(\grave{r}\,)^2}{(1-kr^2)^2} + a^2r\grave{\theta}^{\,2} + a^2r\sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2} = 0\ ,$$

и

$$\grave{\grave{r}} + \frac{2\dot{a}}{a}\grave{r}\,\grave{t} + \frac{kr(\grave{r}\,)^2}{(1-kr^2)} - r\grave{\theta}^{\,2}(1-kr^2) - r\sin^2\theta\grave{\varphi}^{\,2}(1-kr^2) = 0\ .$$

Отсюда

$$\Gamma^1_{01} = \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2},$$

$$\Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2)\ ,$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta(1-kr^2)\ ,$$

т.е. опять же совпадает с выдачей `Maple`'а. В том же духе можно получить и остальные ненулевые кристоффели.

4.3 Тензор Риччи

Здесь пока ограничимся выдачей `Maple`'а.

```
> displayGR(Ricci,Rc);
```

$$\mathit{The\ Ricci\ tensor}$$

$$\mathit{non - zero\ components}\ :$$

$$\mathit{R11} = \frac{2\,k + 2\,(\frac{d}{dt}\,a(t))^2 + a(t)\,(\frac{d^2}{dt^2}\,a(t))}{-1 + k\,r^2}$$

$$\mathit{R22} = -r^2\,(2\,k + 2\,(\frac{d}{dt}\,a(t))^2 + a(t)\,(\frac{d^2}{dt^2}\,a(t)))$$

$$\mathit{R33} = -\sin(\theta)^2\,r^2\,(2\,k + 2\,(\frac{d}{dt}\,a(t))^2 + a(t)\,(\frac{d^2}{dt^2}\,a(t)))$$

$$\mathit{R44} = \frac{3\,(\frac{d^2}{dt^2}\,a(t))}{a(t)}$$

$$\mathit{character}\ :\ [-\mathit{1},\ -\mathit{1}]$$

Последняя строчка значит, что `Maple` выдал ковариантный тензор Риччи: R_{ik} с нижними индексами.

```
> displayGR(Ricciscalar,R);
```

$$\mathit{The\ Ricci\ Scalar}$$

$$R = \frac{6\,(k + (\frac{d}{dt}\,a(t))^2 + a(t)\,(\frac{d^2}{dt^2}\,a(t)))}{a(t)^2}$$

Есть способы вычисления, R ‘с умом’ (см. MTW), мы можем проверить `Maple` и чисто механически (ср. Вихлинин, но заметьте, что он пользуется

другой метрикой, кроме того, как тут у него опечатка), и убедиться, что знак R при определении по ЛЛ нужно взять противоположный.
Обозначая $\dot{a} \equiv da/dt$, мы получаем скаляр Ricci (при соглашении о знаках по ЛЛ)

$$R = -\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \ ,$$

и действие с лагранжианом

$$\mathcal{L}_H = \varkappa\sqrt{-g}R \ .$$

(Ниже покажем, что $\varkappa = c^3/16\pi G$.) Учтём, что

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3 r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

4.4 Полное действие Гильберта

Для чёрной дыры мы нашли вакуумные решения для метрики. Чисто вакуумный случай мало интересен для вселенной, заполненной материей, поэтому действие S должно иметь дополнительный член с лагранжевой плотностью всех видов материи $\mathcal{L}_m$:

$$S = S_H + S_m = \varkappa \int R\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x \ .$$

Фактор $1/c$ появляется, если мы пишем $dx^0 = cdt$. Это действие Гильберта связывает воедино свойства вещества и геометрию пространства: “Matter bends space, and space gives matter its marching orders” (J.A.Wheeler). (Материя искривляет пространство, а пространство отдаёт материи приказы на марш).
Вариации S_m относительно δg^{ik} производят тензор энергии-импульса T_{ik}:

$$T_{ik} = 2c\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} \ .$$

Это выражение (вариационную, или функциональную производную) надо понимать так:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d^4x \ .$$

(см. любую хорошую книгу по ОТО, например ЛЛ).
Я покажу, что основное уравнение в космологии можно вывести и не пользуясь T_{ik}, прямо из S_M, но ниже будет полезно рассмотреть и стандартный подход через T_{ik}.

4.5 Уравнение Фридмана из вариационного принципа

Мы берём самый простой случай совершенной (идеальной) жидкости, и плотность лагранжиана $\mathcal{L}_m$ должна как-то выражаться через энергию в единице объёма $\mathcal{E}$. Выделим вклад плотности массы ρ (массы 'покоя', хотя, как справедливо заметил Л.Б.Окунь, никакой другой массы не бывает) и вклад давления:

$$\mathcal{E} = \rho c^2 + \rho \Pi \,.$$

Мы рассмотрим только адиабатические возмущения,

$$d\left(\frac{\mathcal{E}}{\rho}\right) - P\left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right) = 0\,.$$

Это даёт

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\mathcal{E}}{P+\mathcal{E}}$$

и $d\Pi = P d\rho/\rho^2$,

$$\Pi = -\frac{P}{\rho} + \int_0^P \frac{dP}{\rho},$$

где последний член – это просто энтальпия. Если взять

$$\mathcal{L}_m = \rho c^2 + \rho\Pi = \mathcal{E},$$

то можно получить через вариации $\delta S_M/\delta g^{ik}$ выражение T_{mn} для совершенной жидкости:

$$T_{mn} = (P+\mathcal{E})u_m u_n - P g_{mn}\ ,$$

где $\mathcal{E}$ и P – плотность энергии и давление (соответственно), измеренные в системе покоя, а u^m – четыре-скорость жидкости,

$$u^m = (1,0,0,0)$$

в сопутствующих координатах (при фиксированных r, θ, φ). Итак, оказывается, что плотность лагранжиана для идеальной жидкости $\mathcal{L}_m$ есть просто плотность энергии $\mathcal{E}$.

Таким образом, из скаляра Риччи R и $\mathcal{E}$, умноженных на a^3 из $\sqrt{-g}$, мы имеем функцию Лагранжа L для нахождения $a(t)$:

$$L[a(t)] = -6\varkappa(a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2 + ka) + \frac{1}{c}\mathcal{E}a^3.$$

Мы можем избавиться от $\ddot{a}$, взяв этот член в $\int L dt$ по частям,

$$\int a^2 \ddot{a} dt = \int a^2 d\dot{a} = a^2 \dot{a} \Big|_{t_0}^{t} - \int \dot{a} da^2 = \text{const} - 2 \int \dot{a}^2 a dt.$$

Я выписал пределы интегрирования только у внеинтегрального члена, подразумевается, что эти пределы те же и у интегралов.

В случае метрики Шварцшильда мы искали функцию от радиальной координаты и заметили, что вопрос о пределах интегрирования не тривиален. Теперь мы интегрируем по времени t. Нижний предел можно взять за нуль $t_0 = 0$ (то что называют моментом Большого Взрыва - Big Bang). Не надо забывать, что решение в этом нуле в идеализированных моделях окажется сингулярным, структуру этой сингулярности в рамках ОТО уже нельзя изучать. Верхний предел хотелось бы унести на бесконечность, но сделать это нельзя, наша модельная вселенная может оказаться конечной во времени. От второй производной мы избавимся, получим лагранжиан с первыми производными, но в отличие от принципа экстремума действия классической механики, когда мы фиксируем только координаты частиц на концах траектории, теперь мы должны фиксировать и скорость (здесь $\dot{a}$). Только при $\delta a = 0$ и $\delta \dot{a} = 0$ на границах области интегрирования мы можем забыть о внеинтегральном члене. Заметим, что при применении вариационного принципа в общем виде в учебниках обычно не обсуждают тонкие вопросы о пределах, т.е. вариациях на границе, которую обычно уносят к 'бесконечности', хотя это является предметом долгих дискуссий в серьёзных статьях (см., например, Л.Д.Фаддев, УФН, 1982, том 136, вып.3, можно взять на сайте УФН). Зануление вариаций производных на границе обычно упоминают, но уравнения из вариационного принципа получают, сразу забыв об этом ограничении (одно известное мне исключение – книга Wald'a, см. вложение). Иногда это можно делать (например если рассматривать метрики внутри и вокруг звезд, тогда на бесконечности все вариации зануляются), но я не уверен, что где-то подробно исследовано, что классы получаемых уравнений *всегда* совпадают. Ведь у нас остаётся лагранжиан только с первыми производными, значит вариационная задача будет, вообще говоря, уже определена при нулевых вариациях искомых величин на границах. Если мы зафиксируем эти величины, найдём решение, то в этом решении уже будут какие-то производные на границе определены (совсем не те, что мы хотим зафиксировать).

Таким образом, забыв о внеинтегральном члене, мы получим лагранжиан для масштабного фактора $a(t)$ (в единицах $c = 1$):

$$L = \frac{3}{8\pi G}(-\dot{a}^2 + ka) - \mathcal{E} a^3.$$

Мы можем взять любое баротропное уравнение состояния, чтобы связать $\mathcal{E}$ и ρ. Предположить теперь, что $\mathcal{E}$ зависит только от a (через ρ), а не от $\dot{a}$. Тогда мы имеем 'гамильтониан'

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} - L = \frac{3}{8\pi G}(-a\dot{a}^2 - ka) + \mathcal{E}a^3.$$

Здесь нет никакой явной зависимости от времени t, т.е. $\mathcal{H}$ должен быть постоянным, откуда

$$\frac{3}{8\pi G}(-\dot{a}^2 - ka) + \mathcal{E}a^3 = \text{константа},$$

или

$$\dot{a}^2 + ka = \frac{8\pi G}{3}\mathcal{E}a^3 + \text{константа}.$$

Теперь, если мы берём самый простой случай нулевого давления материи ('пыль', сделанная из галактик),

$$\mathcal{E} = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3,$$

мы видим, что константа может быть поглощена в определение $\rho_0 a_0^3$ (как мы обсуждали на лекции, эта константа определяется правильным выбором нулевого отсчёта энергии материи), и мы получим

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\mathcal{E} - \frac{k}{a^2}\ .$$

Восстановив скорость света c, получим

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\mathcal{E} - \frac{kc^2}{a^2}\ . \tag{5}$$

Повторю, что здесь $\dot{a} \equiv da/dt$, G — ньютоновская постоянная тяготения, а $\mathcal{E}$ — плотность всех форм энергии. Это равенство известно как **уравнение Фридмана**, и метрики того вида, что мы здесь использовали, которые подчиняются этим уравнениям, определяют вселенные Фридмана. Или вселенные Friedmann-Robertson-Walker (FRW): Robertson и Walker просто преобразовали $\sin\chi$ или $\sinh\chi$ в метриках Фридмана к r. Для произвольного закона $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$ мы также можем положить const$= 0$, изменяя масштабирование a, потому что плотность энергии $\mathcal{E}$ и $\dot{a}/a$ – это наблюдаемые параметры, а значение a может быть установлено только после того, как мы зафиксируем константу. Метрика ds^2 и уравнение Фридмана остаются инвариантными при замене

$$\begin{aligned} k &\to k/|k| \\ r &\to \sqrt{|k|}\, r \\ a &\to a/\sqrt{|k|}. \end{aligned}$$

Так что единственный существенный параметр – $k/|k|$, и есть три случая представляющие интерес: $k = -1$, $k = 0$, и $k = +1$.

4.6 Ньютонов предел

Физический смысл уравнения (5) можно понять, пользуясь дорелятивистской физикой. Если мы введём массу M внутри радиуса $R = a$:

$$\frac{4\pi \mathcal{E} a^3}{3c^2} = M,$$

то из уравнения Фридмана получим то же самое, что в ньютоновском случае, если вся плотность энергии обеспечена нерелятивистскими барионами, т.е. веществом с давлением $P = 0$.

Приняв, что средняя плотность вещества ρ однородна на больших масштабах ($R > 10$ Мпк в современной Вселенной), мы находим массу в пределах радиуса R, $M = 4\pi\rho R^3/3$, и законы Ньютона дают нам сохранение энергии:

$$\frac{u^2}{2} - \frac{G_{\mathrm{N}} M}{R} = -\mathrm{const}\ ,$$

что выполняется, пока $u \equiv \dot{R} \ll c$, так что

$$\frac{(\dot{R})^2}{2} - \frac{4\pi G_{\mathrm{N}} \rho R^2}{3} = -\mathrm{const}\ .$$

Это выражение совпадает с уравнением Фридмана (5), если мы a обозначим как радиус R – что хорошо, так как в малых масштабах мир (пространство-время) является плоским, и ОТО должна сводиться к нерелятивистской механике по принципу соответствия.