Вывод метрики Керра-Ньюмана

С.И. Глазырин

I. Введение

Метрика Керра-Ньюмана описывает вращающуюся, заряженную черную дыру. Согласно книге [1] "... в литературе нет конструктивного аналитического вывода метрики Керра, адекватного ее физическому смыслу ..." (сам Керр угадал это решение уравнений Эйнштейна [2]). Другой известный специалист по гравитации [3] оспаривает это утверждение и приводит вывод данной метрики, основанный на "... разумных физических и математических предположениях ...". Но, к сожалению, этот вывод чрезвычайно сложен из-за громоздких вычислений. В 1965 году Ньюман и Дженис [5] предложили некоторый математический трюк (алгоритм), позволяющий довольно просто из метрики Шварцшильда получить метрику Керра через некоторое комплексное преобразование. Сам алгоритм был предложен как некоторая простая математическая процедура, которая "случайно" приводит к ответу. В данном реферате мы опишем этот алгоритм и получим метрику Керра-Ньюмана, по пути выведя метрику Рейснера-Нордстрёма (невращающейся заряженной ЧД).

II. Метрика Рейснера-Нордстрёма

Пусть черная дыра имеет заряд q и не вращается. Запишем общий вид радиально-симметричной стационарной метрики в этом случае

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

Условия, накладываемые на неизвестные функции - метрика на бесконечности должна переходить в метрику плоского пространства

$$\nu(r) \to 0,\ \lambda(r) \to 0 \ \text{ при } r \to \infty \tag{2}$$

Для начала решим уравнения Максвелла

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu \tag{3}$$

Удобно переписать это уравнение в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = 4\pi j^\nu \tag{4}$$

Запишем интеграл, который вычисляет заряд всей Вселенной (в нашем случае черной дыры) - для этого необходимо проинтегрировать j^0 по всему 3-х мерному объему при постоянном времени удаленного наблюдателя t=const. В данной ситуации мы можем сделать такую процедуру, т.к. метрика не содержит g_{i0} компонент - время не перемешано с пространством. Напомним, что 4-вектор плотности тока (см. [1])

$$j^\mu = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^\mu}{dx^0} \tag{5}$$

и элемент 3-х мерного объема $dV = \sqrt{-{}^3g}d^3x$. Где ${}^3g$ - детерминант пространственной матрицы: $\sqrt{-g} = \sqrt{g_{00}}\sqrt{-{}^3g}$. Тогда

$$q = \int d^3x\sqrt{-{}^3g}\left(j^0\sqrt{g_{00}}\right) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x\sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}F^{i0}\right) = \frac{1}{4\pi}\int dS_i\sqrt{-g}F^{i0} \tag{6}$$

Определим поверхность, по которой происходит интегрирование, поверхностью шара с радиусом r. Сделаем физическое предположение - электрическое поле направлено вдоль радиуса, а магнитное отсутствует (это означает, что ненулевыми будут только F^{10} и F^{01} компоненты)

$$q = \frac{1}{4\pi} \int e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \sin\theta F^{10} d\theta d\varphi = e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 F^{10} \tag{7}$$

это нам задает $F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu}{}_{\nu}$

$$\begin{gathered} F^{10} = \tfrac{q}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \quad F^{01} = -\tfrac{q}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} \\ F_{10} = -\tfrac{q}{r^2} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}, \quad F_{01} = \tfrac{q}{r^2} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \\ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2 \tfrac{q^2}{r^4} \end{gathered} \tag{8}$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu}_{\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \delta^{\mu}_{\nu} \right) \tag{9}$$

Тогда ненулевые компоненты

$$T^0_0 = T^1_1 = \frac{q^2}{8\pi r^4}, \quad T^2_2 = T^3_3 = -\frac{q^2}{8\pi r^4} \tag{10}$$

Для метрики (1) ненулевые компоненты тензора Риччи можно найти в [1],[4]. Учитывая, что $T^{\mu}_{\mu} = 0$, поэтому $R = 0$, сразу запишем уравнения Эйнштейна (все функции зависят только от r)

$$R^0_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T^0_0 \tag{11}$$

$$R^1_1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T^1_1 \tag{12}$$

$$R^2_2 = R^3_3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) = 8\pi G T^2_2 = 8\pi G T^3_3 \tag{13}$$

Вычтем из (11)- (12), получим (т.к. $T^0_0 = T^1_1$)

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda' + \nu'}{r} = 0 \tag{14}$$

сокращаем и интегрируем

$$\lambda + \nu = \mathrm{const(r)} = 0 \tag{15}$$

последнее равенство получается из граничных условий.
Рассмотрим уравнение (11). Его левая часть очень хорошо свертывается

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r - r e^{-\lambda} \right) = \frac{q^2}{r^4} \tag{16}$$

После интегрирования получим

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{C_1}{r} + \frac{q^2}{r^2} \tag{17}$$

из требования перехода в метрику Шварцшильда при $q = 0$ получим $C_1 = 2m$.
Запишем ответ для метрики Рейснера-Нордстрёма

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dx^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \tag{18}$$

III. Метрика Керра-Ньюмана

Опишем алгоритм Ньюмана-Джениса. Он состоит из нескольких шагов (см. [5],[6])

1. Запишем метрику Рейснера-Нордстрёма в координатах Эддингтона-Финкельштейна. Эти координаты связаны с радиально движущимися фотонами. Для фотона $ds^2 = 0$, поэтому

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}} \tag{19}$$

решение

$$t = \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}} + V \tag{20}$$

где V - задается начальными условиями для фотона. С другое стороны V можно рассматривать как номер фотона, и если сделать V динамической переменной, тогда получим замену координат

$$dt = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}} + dV \tag{21}$$

Подставим это в метрику (18)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dV^2 + 2dVdr - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{22}$$

2. Запишем метрику (22) через "нулевые тетрады"

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu \tag{23}$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям ($\overline{m}$ - комплексное сопряжение m)

$$l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0, \quad l_\mu n^\mu = -m_\mu \overline{m}^\mu = 1, \quad l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0 \tag{24}$$

Для метрики (22) получаем

$$l^\mu = \delta_1^\mu \tag{25}$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)\delta_1^\mu \tag{26}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right) \tag{27}$$

Для краткости будем обозначать

$$Z_a^\mu = \left(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu\right), \quad a = 1..4 \tag{28}$$

3. Переходим в комплексную плоскость $x^\rho \to \tilde{x}^\rho$ (где x^ρ - набор координат $x^\rho = (V, r, \theta, \varphi)$) и, соответственно, переписываем тетрады

$$Z_a^\mu(x^\rho) \to \tilde{Z}_a^\mu(\tilde{x}^\rho, \overline{\tilde{x}}^\rho) \tag{29}$$

но задаем два требования: если x^ρ действительны, то преобразованные тетрады должны равняться изначальным, и компоненты метрики должны оставаться действительными

$$\tilde{Z}_a^\mu(\tilde{x}^\rho, \overline{\tilde{x}}^\rho)\Big|_{\tilde{x}=\overline{\tilde{x}}} = Z_a^\mu(x^\rho) \tag{30}$$

Такое преобразование явно неоднозначно, но для вывода метрики Керра-Ньюмана предлагается определенный его вид

$$l^\mu \;\to\; \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu \tag{31}$$

$$n^\mu \;\to\; \tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - 2m\left(\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\overline{\tilde{r}}}\right) + \frac{q^2}{\tilde{r}\overline{\tilde{r}}}\right)\delta_1^\mu \tag{32}$$

$$m^\mu \;\to\; \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\tilde{\theta}}\delta_3^\mu\right) \tag{33}$$

Заметим, что есть нелогичность в преобразовании для n^μ - члены $\frac{2m}{r}$ и $\frac{q^2}{r^2}$ были преобразованы совершенно различными способами.

4. Следующий шаг - преобразование координат $\tilde{x} \to x'\,(V', r', \theta', \varphi')$, которое задается следующим образом

$$\tilde{x}^\rho = x'^\rho + ia\cos\theta'\,(\delta_0^\rho - \delta_1^\rho) \tag{34}$$

Тогда наши вектора (тетрады) преобразуются следующим образом

$$Z'^\mu_a = \tilde{Z}_a^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tag{35}$$

Новые вектора в новых координатах выглядят следующим образом

$$l'^\mu \;=\; Z'^\mu_1 = \delta_1^\mu \tag{36}$$

$$n'^\mu \;=\; Z'^\mu_2 = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - 2m\left(\frac{1}{r' - ia\cos\theta'} + \frac{1}{\overline{r'} + ia\cos\overline{\theta'}}\right) + \frac{q^2}{(r' - ia\cos\theta')(\overline{r'} + ia\cos\overline{\theta'})}\right)\delta_1^\mu \tag{37}$$

$$m'^\mu \;=\; Z'^\mu_3 = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\cos\theta')}\left(ia\sin\theta'(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta'}\delta_3^\mu\right) \tag{38}$$

5. Возвращаемся назад, на действительную ось, т.е. кладем $x'^\rho = \overline{x'}^\rho$ и получаем метрику по формуле (23). Здесь и далее для упрощения записи мы опускаем штрихи

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 1 + \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 1 + \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} + \frac{q^2}{\rho^2}\right) - \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{a}{\rho^2} & \frac{a}{\rho^2} & 0 & -\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{39}$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$. Обращая эту матрицу, находим метрику Керра в координатах Керра

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2mr-q^2}{\rho^2} & 1 & 0 & a\sin^2\theta\frac{2mr-q^2}{\rho^2} \\ 1 & 0 & 0 & -a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ a\sin^2\theta\frac{2mr-q^2}{\rho^2} & -a\sin^2\theta & 0 & -\sin^2\theta\left(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta\frac{2mr-q^2}{\rho^2}\right) \end{pmatrix} \tag{40}$$

6. * Последний дополнительный шаг - преобразование метрики к координатам Бойера-Линдквиста - координаты, которые переходят в Минковские на бесконечности. Распишем явно метрику в координатах Керра

$$\begin{aligned} ds^2 = \left(1-\frac{2mr-q^2}{\rho^2}\right)dV^2 + 2dVdr - \rho^2 d\theta^2 + 2a\sin^2\theta\frac{2mr-q^2}{\rho^2}dVd\varphi - 2a\sin^2\theta dr d\varphi - \\ -\sin^2\theta\left(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta\frac{2mr-q^2}{\rho^2}\right)d\varphi^2 \end{aligned} \tag{41}$$

Переход к координатам Бойера-Линдквиста записывается следующим образом

$$dt = dV + \frac{r^2+a^2}{\Delta}dr, \quad d\tilde{\varphi} = d\varphi + \frac{a}{\Delta}dr, \quad \text{где } \Delta = r^2 - 2mr + a^2 + q^2 \tag{42}$$

Чтобы легко осуществить эту подстановку сделаем преобразование в (41), явно выделив некоторые выражения

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{r^2-2mr+a^2+q^2}{\rho^2} - \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)dV^2 + 2dVdr + \\ &+ \left(2a(r^2+a^2)\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} - 2a\sin^2\theta\frac{r^2-2mr+a^2+q^2}{\rho^2}\right)dVd\varphi - 2a\sin^2\theta dr d\varphi - \\ &-\rho^2 d\theta^2 + \left(\frac{r^2-2mr+a^2+q^2}{\rho^2}a^2\sin^4\theta - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2)^2\right)d\varphi^2 \end{aligned} \tag{43}$$

тогда можно перегруппировать члены

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dV^2 + \frac{\rho^4}{\Delta^2}dr^2 + a^2\sin^4\theta d\varphi^2 + 2\frac{\rho^2}{\Delta}dVdr - 2a\sin^2\theta dVd\varphi - 2a\sin^2\theta\frac{\rho^2}{\Delta}dr d\varphi\right) - \\ &-\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)^2 d\varphi^2 - 2a(r^2+a^2)dVd\varphi + a^2 dV^2\right) - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \end{aligned} \tag{44}$$

Легко заметить, что выражения в скобках - полные квадраты

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dV + \frac{\rho^2}{\Delta}dr - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)d\varphi - adV\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \tag{45}$$

Теперь можно сделать подстановку (42) и получить конечное выражение

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\tilde{\varphi}\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)d\tilde{\varphi} - adt\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \tag{46}$$

IV. Свойства метрики Керра-Ньюмена

Запишем метрику Керра в двух эквивалентных формах записи в координатах Бойера-Линдквиста - одна форма сводится к другой после раскрытия скобок и перегруппировки членов

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)d\varphi - adt\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \tag{47}$$

$$ds^2 = \frac{\rho^2\Delta}{A}dt^2 - \frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}\left(d\varphi - \frac{2mra}{A}dt\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \tag{48}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad A = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta \tag{49}$$

Покажем, что существует предел статичности. Пусть космический корабль висит на некотором расстоянии от черной дыры Керра и не движется (в координатах БЛ), тогда подставим в (47) условия $dr = 0,\ d\varphi = 0,\ d\theta = 0$, получим

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta}{\rho^2}dt^2 \tag{50}$$

Для того, чтобы увидеть - возможно ли такое движение, необходимо проверить светоподобен или пространственно подобен интервал, Знаменатель этого выражения всегда положителен, а числитель при больших r положителен, но на некотором радиусе меняет знак. Этот радиус называется внешней границей эргосферы

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{51}$$

Оказывается, что на немного меньшем радиусе можно получить светоподобный интервал, если сделать замену $d\varphi = d\tilde{\varphi} - \Omega dt$ и положить $d\tilde{\varphi} = 0$ - в новых координатах - такая замена означает, что тело участвует во вращении, при этом оставаясь на постоянном радиусе. Подставим замену уже в (48) (для удобства)

$$ds^2 = \left(\frac{\rho^2\Delta}{A} - \frac{A\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\Omega + \frac{2mra}{A}\right)^2\right)dt^2 = \left(\frac{\rho^4\Delta - 4\sin^2\theta m^2r^2a^2}{\rho^2 A} - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\underbrace{\left[4mra\Omega + A\Omega^2\right]}_{X}\right)dt^2 \tag{52}$$

Найдем минимальное значение $X_{\min} = -\frac{4m^2r^2a^2}{A}$. Это означает, что меняя Ω мы можем добиться следующей максимальной светоподобности интервала

$$ds^2 = \frac{\rho^2\Delta}{A} \tag{53}$$

Это значит, что такое движение возможно при $\Delta > 0$. Это означает, что все тела при $r < r_+$ участвуют во вращении, индуцированном кривизной пространства. Из этой области можно выскочить и улететь на бесконечность. При $\Delta = 0$ находится горизонт событий этой черной дыры. Т.е. при $r < r_g$ неизбежно падение на центр

$$r_g = m + \sqrt{m^2 - a^2} \tag{54}$$

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Том II “Теория поля”

[2] R. P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, PhysRev Letters (1963), Vol. 11, Issue 5, p.237-238

[3] С. Чандрасекар “Математическая теория черных дыр”. Часть 2

[4] С. Н. Вергелес “Лекции по теории гравитации”

[5] E. T. Newman , A. I. Janis, *Note on the Kerr Spinning-Particle Metric*, Journal of Mathematical Physics (1965), Vol. 6, p.915-917

[6] S. P. Drake, P. Szekeres, *An Explanation of the Newman-Janis Algorithm*, gr-qc/9807001v1