Семинар по релятивистской астрофизике. 03 апреля 2008

Рук. Блинников С.И.

9 апреля 2008 г.

Аннотация

П.Бакланов. Опровержение “теоремы” Лапласа о скорости гравитации на примере электродинамики.

А.Толстов. О парадоксе близнецов. Картина звёздного неба при большом Лоренц-факторе.

С.Блинников. Первые слова о метрике Шварцшильда, о кривизне, о тензорах Римана и Риччи.

1 П.Бакланов. Утверждение теоремы Лапласа

В конце XVI века Ньютон открыл закон всемирного тяготения:

$$\vec{F} = \frac{GMm}{R^3}\vec{R} \tag{1}$$

Действия силы направленно по $\vec{R}$, точно от одного тела к другому, независимо от движения тел и взаимного расстояния между ними.
Позже, в конце XVII века, Лаплас задался вопросом: “Мгновенно ли передается притяжение от одного тела к другому?” и исследовал его на системе Земля-Луна.
Идея рассуждения Лапласа:
если скорость гравитации конечна, то при движении гравитирующих тел меняется направление действия силы тяготения, аналогично эффекту аберрации при оптических наблюдениях. Тогда сила становится не центральной и возникающие возмущения делают орбиту Луны не устойчивой. Аберрация пропорциональна v/c, значит и возмущения будут того же порядка.

Цитата из книги Лапласа "Изложение системы мира"(Л., Наука, 1982) взята с сайта противника ОТО :) (`http://www.veinik.ru/science/fizmat/article/150.html`):
“Продолжительность его передачи, если бы она была для нас ощутима, обнаружилась бы главным образом в вековом ускорении движения Луны. Я предлагал таким способом объяснить наблюдаемое ускорение этого движения и нашел, что удовлетворить наблюдениям можно, лишь приписав силам тяжести скорость, в 7 000 000 раз большую скорости светового луча. Так как причина векового уравнения Луны в настоящее время хорошо известна, мы можем утверждать, что тяготение передается, по крайней мере, в 50 000 000 раз быстрее света. Поэтому, не боясь внести заметную ошибку, можно считать его распространение мгновенным.”

1.1 Задача о движении точечного заряда

На семинаре была рассмотрена аналогичная задача про движение точечного заряда, только закон Ньютона подменили законом Кулона. По форме эти законы очень похожи, а уравнения для вывода напряженности электрического поля проще, чем для гравитационного поля.

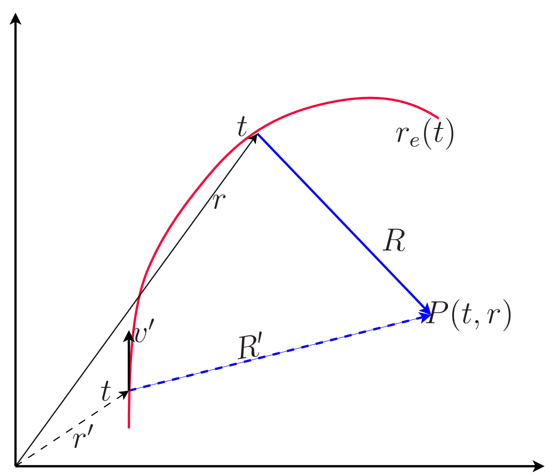

рис.1

Красная линия - это траектория движения точеного заряда. P - точка наблюдения, в которой вычисляется поле в данный момент времени t. Точка t', отстает от t на величину R'/c. R' и R радиус-векторы, проведенные от положения заряда в моменты времени t' и t в точку наблюдения P.
Было показано, что если правильно учесть запаздывание, то с точностью до членов v/c поле от точечного заряда, двигающегося по произвольной

траектории $\vec{r}_e = \vec{r}(t)$ совпадает с законом Кулона (полный вывод дан в ЛЛ II §§62-63, см. ниже).
Поле $\vec{E}$ имеет вид:

$$\vec{E} = e\frac{(1-\frac{v'^2}{c^2})(\vec{R}'-\vec{v}'\frac{R'}{c})}{(R'-\frac{\vec{R}'\vec{v}'}{c})^3} + \frac{e}{c^2(R'-\frac{\vec{R}'\vec{v}'}{c})^3}[\vec{R}'[(\vec{R}'-\frac{\vec{v}'}{\vec{c}}R')\dot{\vec{v}'}]] \qquad (2)$$

причем штрихи обозначают, что величины должны быть взяты в момент времени t', связанный с текущим моментом t через уравнение $t' + R'/c = t$. Второе слагаемое пропорционально $1/c^2$ и следовательно при нашей точности (v/c) его можно не рассматривать.

Точнее, если R_0, скажем, есть радиус круговой орбиты, то $\dot{\vec{v}'} \sim v^2/R_0$ и во втором члене есть малось $\sim (v/c)^2$. На больших расстояниях, $R \gg R_0 c/v$, т.е. в волновой зоне, второй член начнёт преобладать из-за более медленного спадания с R, но нам сейчас это не интересно, у нас $R \sim R_0$. - СБ

Первое слагаемое похоже на закон Кулона, только вместо $\vec{R}$ стоит выражение вида $(\vec{R}' - \vec{v}'R'/c)$. Если вспомнить, что $\dot{\vec{R}} = -\vec{v}$, и переписать выражение как

$$(\vec{R}' + \dot{\vec{R}}'\frac{R'}{c}) \ ,$$

то видно, что это просто разложение в ряд $\vec{R}(t)$ в момент t' с точностью до членов порядка $1/c$.

При равномерном и прямолинейном движении заряда $\dot{\vec{R}} = -\vec{v} = \text{const}$, то $\vec{R} = \vec{R}' - \vec{v}'R'/c$ в точности. А значит $\vec{E}$ направлено точно в истинное положение заряда ($\vec{R}$ в момент t). Можно показать, что и выражение в знаменателе с точностью до членов $(v/c)^2$ равно R (см. ЛЛ II §63, в конце параграфа).

1.2 Почему $\vec{v} = -\dot{\vec{R}}$

Согласно выбранным направления векторов, см. рис.1., $\vec{r_e} + \vec{R} = \vec{r_P}$. Отсюда $\vec{R} = \vec{r_P} - \vec{r_e}$. Дифференцируя, получим равенство $\dot{\vec{R}} = -\vec{v}$, полагая $\vec{v} = \dot{\vec{r_e}}$.

1.3 Вывод формулы (2) из ЛЛ II §63

В системе отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится, поле в точке наблюдения в момент t дается просто кулоновским потенциалом, т. е.

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \tag{63,2}$$

Выражения для потенциалов в произвольной системе отсчета мы получим теперь, написав такой 4-вектор, который бы при скорости $\mathbf{v} = 0$ давал для φ и $\mathbf{A}$ значения (63,2). Замечая, что согласно (63,1) φ из (63,2) можно написать также и в виде

$$\varphi = \frac{e}{c(t - t')},$$

находим, что искомый 4-вектор есть

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}, \tag{63,3}$$

где u^k — 4-скорость заряда, а 4-вектор $R^k = [c(t - t'),\ \mathbf{r} - \mathbf{r}']$, причем x', y', z', t' связаны друг с другом соотношением (63,1); последнее может быть записано в инвариантном виде как

$$R_k R^k = 0. \tag{63,4}$$

Переходя теперь снова к трехмерным обозначениям, получим для потенциалов поля, создаваемого произвольно движущимся точечным зарядом, следующие выражения:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \qquad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{63,5}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P, и все величины в правых частях равенств должны быть взяты в момент времени t', определяющийся из (63,1). Потенциалы поля в виде (63,5) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта.*

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

надо дифференцировать φ и $\mathbf{A}$ по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения. Между тем формулы (63,5) выражают потенциалы как функции от t' и лишь через соотношение (63,1) — как неявные функции от x, y, z, t. Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от t'. Дифференцируя соотношение $R(t') = c(t - t')$ по t, имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{Rv}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(значение $\partial R/\partial t'$ получается дифференцированием тождества $R^2=\mathbf{R}^2$ и подстановкой $\partial\mathbf{R}(t')/\partial t=-\mathbf{v}(t')$; знак минус здесь связан с тем, что $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор от заряда e в точку P, а не наоборот). Отсюда

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\mathbf{vR}}{Rc}}. \qquad (63,6)$$

Аналогично, дифференцируя то же соотношение по координатам, найдем:

$$\operatorname{grad} t'=-\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t')=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t'+\frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

откуда

$$\operatorname{grad} t'=-\frac{\mathbf{R}}{c\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}. \qquad (63,7)$$

С помощью этих формул не представляет труда вычислить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Опуская промежуточные вычисления, приведем получающийся результат:

$$\mathbf{E}=e\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \qquad (63,8)$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \qquad (63,9)$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}}=\partial\mathbf{v}/\partial t'$; все величины в правых сторонах равенств берутся в момент t'. Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным к электрическому.

Электрическое поле (63,8) состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит только от скорости частицы (но не от ее ускорения) и на больших расстояниях меняется как $1/R^2$. Второй член зависит от ускорения, а при больших R меняется как $1/R$. Мы увидим ниже (§ 66), что этот последний член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами.

Что касается первого члена, то, будучи независимым от ускорения, он должен соответствовать полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Действительно, при постоянной скорости разность

$$\mathbf{R}_{t'}-\frac{\mathbf{v}}{c}R_{t'}=\mathbf{R}_{t'}-\mathbf{v}(t-t')$$

есть расстояние $\mathbf{R}_t$ от заряда до точки наблюдения в самый момент наблюдения. Легко также убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$R_{t'} - \frac{1}{c}\mathbf{R}_{t'}\mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{R}_t]^2} = R_t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_t},$$

где θ_t — угол между $\mathbf{R}_t$ и $\mathbf{v}$. В результате первый член в (63,8) оказывается совпадающим с выражением (38,8).

Итак, эффекта аберрации порядка v/c в кулоновской силе нет. Конечно, если заряд резко сойдёт с прямой или круговой орбиты, за счёт резкого включения какого-нибудь реактивного двигателя, то наблюдатель узнает об этом только через время R/c благодаря большому ускорению во втором члене в (2). В таком случае, естественно, кулоновская сила уже не "смотрит" в ту точку, где реально "сейчас" находится заряд. - СБ