Семинар по релятивистской астрофизике. 13 марта 2008

Рук. Блинников С.И.

31 марта 2008 г.

Аннотация

Парадоксы СТО.

Опровержение “теоремы” Лапласа о скорости гравитации на примере электродинамики.

1 Преобразование Лоренца

Пусть есть две лоренцевых системы отсчёта S и $\tilde{S}$. Чаще всего в книжках по СТО вторую систему обозначают S' и называют “штрихованной”, но тогда и координаты во второй системе надо помечать штрихом, а это неудобно в ОТО, где мы часто будем писать x', t' и т.п. для производных x, t по пространственной переменной. Поэтому здесь я использую тильду $\tilde{S}$. При равномерном движении тела отсчёта $\tilde{S}$ вдоль оси x со скоростью v относительно S координаты связаны так:

$$\tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{t} = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \ .$$

Тут принято $c = 1$. Это преобразование оставляет интервал

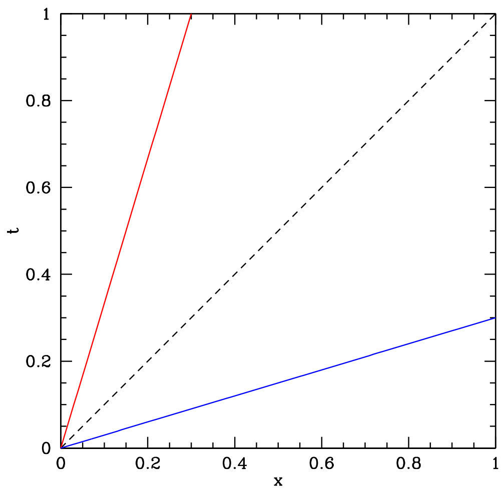
$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

инвариантным.

Ниже будем писать Лоренц-фактор

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \ .$$

На рисунке красная линия показывает график $\tilde{x} = 0$ – так выглядит ось времени системы $\tilde{S}$ в системе S, а синяя линия – график $\tilde{t} = 0$ в координатах (t, x) при таком преобразовании, когда $v = 0.3c$. Вводя "быстроту" (rapidity) $\operatorname{th} u = v/c = v$ можно преобразование Лоренца записать и так



$$\tilde{x} = x \operatorname{ch} u - t \operatorname{sh} u,$$
$$\tilde{t} = t \operatorname{ch} u - x \operatorname{sh} u.$$

В общем случае мы пишем интервал через метрический тензор g_{ik}, зависящий от 4-координат:

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(x)\, dx^i dx^k \equiv g_{ik}(x)\, dx^i dx^k,$$

причём $g_{ik} = g_{ki}$ (суммирование по повторяющимся индексам). В случае СТО $g_{ik} \equiv \eta_{ik} \equiv \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$. Такой способ предпочтительней, чем введение мнимой единицы (переход к мнимому времени $t \to it$), сделанный Пуанкаре ещё за несколько лет до Минковского. Однако введение мнимой единицы и координаты $x^4 \equiv it$ вместо t помогает представить последнее преобразование просто как поворот на угол u в осях x, x^4. Имеем $\operatorname{ch} iu = \cos u$ и $\operatorname{sh} iu = i \sin u$, тогда

$$\tilde{x} = x \operatorname{ch} u - t \operatorname{sh} u = x \cos u - x^4 \sin u,$$
$$\tilde{t} = t \operatorname{ch} u - x \operatorname{sh} u = t \cos u - ix \sin u.$$

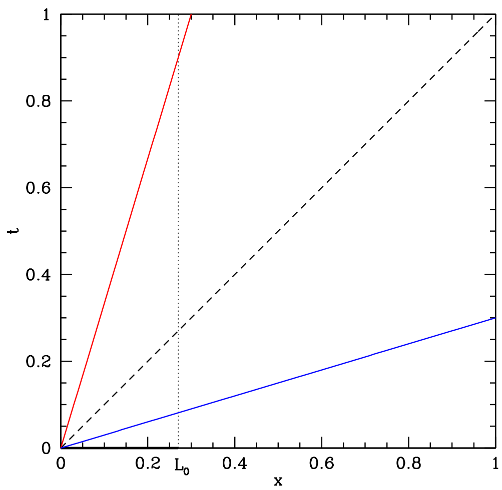
т.е.

$$\tilde{x^4} = i\tilde{t} = it \operatorname{ch} u - ix \operatorname{sh} u = x^4 \cos u + x \sin u.$$

Чисто лоренцево преобразование (без пространственных поворотов S к $\tilde{S}$) называют 'буст' (boost). Введение поворота на мнимый угол iu может быть полезно при графическом представлении общего преобразования Лоренца – бустов совместно с реальными поворотами – при выводе генераторов группы Лоренца при малых углах и т.п. Вряд ли введение мнимости целесообразно в общем случае, а метрика g_{ik} работает всегда, и в СТО и ОТО. А применять быстроту в нужных случаях удобно и без перехода к мнимому времени. Например, при выводе закона сложения двух скоростей v_{x1} и v_{x2} в СТО достаточно просто сложить две быстроты $u_{x1} + u_{x2}$. Суммарная скорость $v = \operatorname{Arth}(u_{x1} + u_{x2})$.

2 Сокращение длины и замедление времени

Пусть стержень собственной длины L_0 лежит в покое в S: левый конец при $x = 0$, правый – при $x = L_0$. Мировая линия левого конца совпадает с осью t, а правого показана на рисунке пунктирной линией. Видно, что когда у левого конца стержня в системе S координаты $x_0 = 0$, $t_0 = 0$, в системе $\tilde{S}$ тот же конец имеет координаты $\tilde{x}_0 = 0$, $\tilde{t}_0 = 0$, а в мировой точке правого конца при $t_0 = 0$ в S, часы системы $\tilde{S}$ показывают ещё отрицательное время $\tilde{t}_1 = -vL_0/\sqrt{1-v^2} = -vL_0\gamma$. Чтобы узнать длину L в системе $\tilde{S}$ нужно знать координаты концов в один момент, например, при $\tilde{t}_0 = 0$.



Из $\tilde{t} = (t - vx_1)\gamma$ это соответствует $t = vL_0$, тогда получаем лоренцево сокращение в γ раз:

$$L = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0 = (x_1 - vt)\gamma = (L_0 - v^2 L_0)\gamma = L_0(1 - v^2)\gamma = L_0/\gamma \ .$$

На самом деле всё проще, если сразу написать обратное преобразование Лоренца

$$x = (\tilde{x} + v\tilde{t})\gamma, \quad t = (\tilde{t} + v\tilde{x})\gamma \ ,$$

откуда для какого-то момента $\tilde{t}$

$$x_0 = (\tilde{x}_0 + v\tilde{t})\gamma, \quad x_1 = (\tilde{x}_1 + v\tilde{t})\gamma \ .$$

Моменты времени t в системе S тут разные, но x_1, x_0 всё равно не меняются, так что вычитание $x_1 - x_0$ даёт $L_0 = L\gamma$ и $L = L_0/\gamma$.

Аналогично, для промежутка времени $\Delta\tilde{t}$ по часам, покоящимся при каком-то $\tilde{x}$ в системе $\tilde{S}$ получаем, что по часам в S промежуток времени дольше в γ раз:

$$t_b - t_a = \Delta t = \Delta\tilde{t}\gamma \ .$$

3 Первые парадоксы

Мы обсудили простейшие парадоксы СТО. Например, один из них, известный под названием “бегун с копьём”, он же “шест и сарай”, он же “карандаш и пенал”, он же “гоночный автомобиль и гараж”, разобрал Семён Глазырин. Условие парадокса в том, что стержень собственной длины, к примеру, 10 м можно поместить в сарай длиной 5 м, если Лоренц-фактор стержня относительно покоящегося сарая $\gamma > 2$. Когда шест попадёт в сарай (или авто в гараж) за ним можно захлопнуть дверь до того, как это тело пробьёт противоположную от входа стенку. Пусть вход слева, а стенка справа. Т.е. шест на какое-то время поместится в сарае целиком. Но с точки зрения бегуна с копьём/шестом сарай сократится в γ раз и 10-метровое тело никак не уместится в сарае длиной меньше 2.5 м.

Суть решения этого парадокса в относительности одновременности: в системе отсчёта шеста дверь за ним захлопнется гораздо позже того момента, когда его передний конец пробьёт правую стенку. Чтобы всё проанализировать, тут достаточно нарисовать две диаграммы x, t – вроде тех, что были на предыдущих страницах: одну в системе стержня, другую в системе гаража.

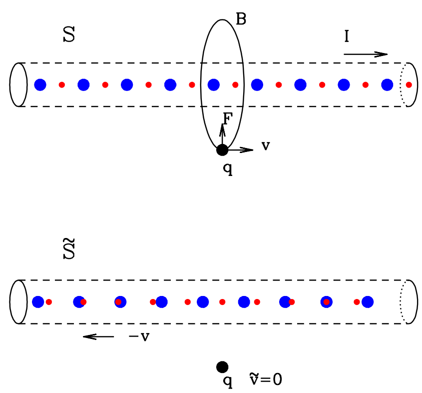
Гораздо сложнее анализ времени будет в случае, если бегун или водитель авто сумел затормозить до того, как передний край пробил правую стенку. А дверка слева за ним уже закрылась (в системе гаража). Стоящий автомобиль не может в гараже поместиться, он будет сложным образом деформироваться, выбивая левую стенку, ускорения разных точек будут разными. Мы знаем, что ускорения эквивалентны гравитации, и все часы в разных точках будут идти по-разному.

В следующий раз мы рассмотрели близкий парадокс о стержне собственной длины L_0, в лаб. системе, летящий влево со скоростью v_x параллельно плоскости, поднимающейся со скоростью v_y. На плоскости есть отверстие диаметром L_0 и всё рассчитано так, что стержень (сжатый лоренцевым сокращением) проходит через отверстие. В системе отсчёта стержня сжато отверстие. Как же стержень может пройти через отверстие в своей системе отсчёта?

4 Магнитное поле как релятивистский эффект

Обычно преобразования Лоренца выводят, следуя постулату постоянства скорости света и принципу относительности. Современный подход к выводу преобразований Лоренца (без постулата о скорости света) см. в интереснейшей работе З.Силагадзе http://arxiv.org/abs/0708.0929 . Там же изложено много нетривиальных для физики исторических фактов. В частности, этот "современный" подход был открыт почти 100 лет назад.

Однако можно и преобразования Лоренца тоже принять за постулат. Вернее: их можно обосновать из эксперимента, если учесть, что уже полвека назад появились цезиевые часы, эффект Мёссбауэра, которые позволили измерить релятивистский эффект замедления времени в $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ раз.



А релятивистский эффект лоренцева сокращения (или Фицжеральда) реально "наблюдали" уже в начале 19-го века, когда открыли силу Ампера – между проводниками с током. На верхнем рисунке изображен проводник в системе, где он покоится и нейтрален. Большие синие шарики – ионы, маленькие красные – электроны. На положительный заряд q действует сила Лоренца F, которая и объясняет силу Ампера. При выбранном направлении тока электроны движутся влево.

Перейдём в систему отсчёта, где q покоится (нижний рисунок). Силу Лоренца он там не чувствует. Но ускорение должно остаться. Оно может быть вызвано только электрическим полем, а поле создано отрицательным зарядом, возникшим на проводнике. Дело в том, что лоренцево сокращение расстояния между электронами сильнее, чем между ионами, так как скорость их в системе $\tilde{S}$ больше, чем у ионов.

Так преобразования Лоренца для пространства-времени приводят к физическому обоснованию преобразования Лоренца для электрического и магнитного поля. Эти последние преобразования можно вывести и вполне формально: все 4-векторы, в том числе и (φ, A) для потенциала преобразуются как (dt, dx). Пётр Бакланов начал с помощью этих преобразований разбирать "теорему" Лапласа об "аберрации" при распространении кулоновского взаимодействия. Продолжим на следующих занятиях.