Постньютоновское приближение

С.И. Глазырин

Приведем краткое описание и конечные выражения для постньютоновского приближения. Подробный вывод можно найти в [1] (в книге имеются некоторые опечатки, поэтому привожу здесь корректные формулы[2]). Постньютоновское приближение - это разложение по малой скорости v. Заметим, что потенциал имеет порядок v^2. Нас интересует разложение до 4ого порядка. Тогда метрика записывается так

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu} + g^{(2)}_{\mu\nu} + g^{(3)}_{\mu\nu} + g^{(4)}_{\mu\nu} + ... \tag{1}$$

где $g^{(N)} \sim v^N$ ($\eta = \mathrm{diag}[-1, 1, 1, 1]$). Аналогично $T^{\mu\nu\ (N)}$ - член порядка Mv^N/L^3. Здесь мы считаем, что у нас заданы характерные размеры изменения параметров L и характерные массы M создающих гравитацию тел.

Тогда мы получаем интересующие нас компоненты (здесь использованы так называемые гармонические координаты $g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$)

$$\begin{aligned} g^{(2)}_{00} &= -2\phi & (2)\\ g^{(4)}_{00} &= -2\phi^2 - 2\psi & (3)\\ g^{(3)}_{oi} &= \xi_i & (4)\\ g^{(2)}_{ij} &= -2\delta_{ij}\phi & (5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \phi &= -G\int d^3x' \frac{T^{00\ (0)}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, & (6)\\ \xi_i &= -4G\int d^3x' \frac{T^{0i\ (1)}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, & (7)\\ \psi &= -\int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + GT^{00\ (2)} + GT^{ii\ (2)}\right) & (8) \end{aligned}$$

Уравнение движения пробной частицы

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\xi) + 3\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathbf{v} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\phi - v^2\nabla\phi \tag{9}$$

Т.к. при написании этого уравнения использованы специальные координаты, то надо связать время с собственным временем частицы

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \phi - \frac{1}{2}v^2 + \psi - \mathbf{v}\xi + v^2\phi + \phi^2 - \frac{1}{8}(2\phi - v^2)^2 \tag{10}$$

Запишем также уравнения постньютоновской гидродинамики идеальной жидкости

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}, \quad p = p(\rho) \tag{11}$$

Уравнения

$$T^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = 0 \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= T^{00\ (0)} + T^{00\ (2)} = \rho(1 - 2\phi + v^2) && (13)\\
T^{i0} &= T^{i0\ (1)} + T^{i0\ (3)} = v^i(\rho + p - 2\phi\rho + v^2\rho) && (14)\\
T^{ij} &= T^{ij\ (2)} + T^{ij\ (4)} = p\delta^{ij}(1 + 2\phi) + v^i v^j(\rho + p - 2\phi\rho + v^2\rho) && (15)
\end{aligned}
$$

Сначала решаем обыкновенные уравнения гидродинамики

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \qquad (16)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla(\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p - \rho \nabla \phi, \qquad (17)
$$

$$
\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \qquad (18)
$$

из них находим ϕ, ξ^i, ψ и уже решаем постньютоновские уравнения с этими постоянными полями

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(1 - 2\phi + v^2)\right) + \nabla\left(\mathbf{v}(\rho + p - 2\phi\rho + v^2\rho)\right) = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad (19)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v}(\rho + p - 2\phi\rho + v^2\rho)\right) + \nabla\left(\mathbf{v}\mathbf{v}(\rho + p - 2\phi\rho + v^2\rho)\right) = -\nabla(p(1 + 2\phi)) - \rho\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \\
-\rho\frac{\partial \xi}{\partial t} - \rho(v^2 - 2\phi)\nabla\phi + \rho\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 4\rho\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + p\nabla\phi - \rho v^2\nabla\phi + 4\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\phi \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Отсюда находим $\rho, p, \mathbf{v}$.

---

[1] С. Вайнберг, Гравитация и Космология

[2] При чтении книг следует обратить внимание, что в Вайнберге другой знак в определении тензора Римана чем в Ландау-Лифшице, следовательно и другой знак в правой части уравнений Эйнштейна. Формулы, приведенные здесь универсальны.