Геодезические, кривизна и вывод метрики Шварцшильда

С.И.Блинников

sergei.blinnikov@itep.ru, sblinnikov@gmail.com

ИТЭФ, ГАИШ, НГУ

S.I.Blinnikov[1,2]

[1] *ИТЭФ = ITEP = Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow*

[2] *ГАИШ = SAI = Sternberg Astronomical Institute, Moscow*

НГУ 06 и 10 октября 2012

Символы Кристоффеля

Если обозначить

$$\Gamma_{mik} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{im} + \partial_i g_{km} - \partial_m g_{ik}\right)$$

и

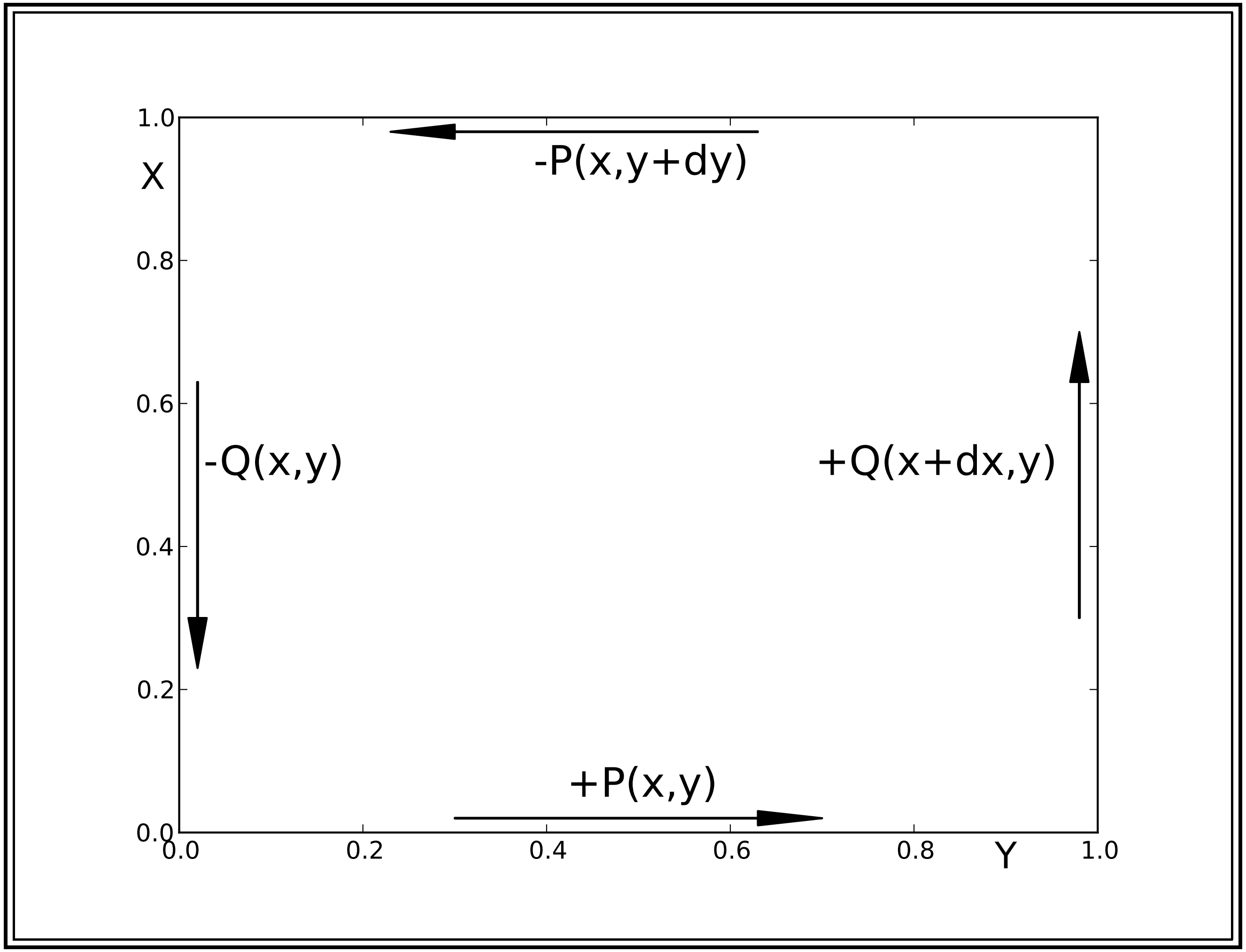
$$\Gamma^n_{ik} \equiv g^{mn}\Gamma_{mik} \equiv \frac{1}{2}g^{mn}(\partial_k g_{im} + \partial_i g_{km} - \partial_m g_{ik}) \ , \qquad (1)$$

– коэффициенты связности (символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода), то окончательно получим

$$\ddot{x}^n + \Gamma^n_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0 \ . \qquad (2)$$

Это и есть **уравнение геодезической.**

К теоремам Грина и Стокса



Тензоры Римана и Риччи

Riemann tensor:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \ ,$$

and Ricci tensor:

$$R_{ik} = R^m_{imk} \ .$$

Т.е. тензор Риччи есть

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{im}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ik} - \Gamma^m_{nk}\Gamma^n_{im} \ ,$$

Скаляр Риччи

$$R = g^{ik} R_{ik} \ .$$

Ansatz метрики Шварцшильда

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu(t,r)} dt^2 - \mathrm{e}^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \ ,$$

Все ненулевые кристоффели:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu}, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\nu' = \Gamma^0_{10}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} \ ,$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\nu', \quad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}\dot{\lambda} = \Gamma^1_{10}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda',$$

$$\Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta \mathrm{e}^{-\lambda} \ , \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\theta = \Gamma^3_{32}.$$

$\Gamma^n{}_{ik}$, R_{ik} в Maxima

wxmaxima – click here for web

wxmaxima – for files saved locally

Скаляр Риччи на `Maple`

$$R = \left[-r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \nu(r) \right) - \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \nu(r) \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \nu(r) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \lambda(r) \right) \right.$$
$$\left. -2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \nu(r) \right) r + 2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \lambda(r) \right) r + 2 \mathrm{e}^{\lambda(r)} - 2 \right] \Big/ \left(r^2 \, \mathrm{e}^{\lambda(r)} \right)$$

Если проделать вручную и сравнить с Ландау-Лифшицем или Вихлининым, то сразу видно, что ответ Мапла (`Maple`) правильный, только знак R другой.

wxMaxima R

Для случая $\lambda(t,r)$ $,\nu(t,r)$:

$$e^{-\nu-\lambda}\left(\left(e^{\lambda}\left(\frac{d}{d\,t}\,\lambda\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,\nu\right)+2\,e^{\nu}\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\nu\right)+e^{\nu}\left(\frac{d}{d\,r}\,\nu\right)^2-\frac{d}{d\,r}\,\lambda\,e^{\nu}\left(\frac{d}{d\,r}\,\nu\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\,e^{\lambda}\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\lambda\right)-e^{\lambda}\left(\frac{d}{d\,t}\,\lambda\right)^2\right)r^2+\left(4\,e^{\nu}\left(\frac{d}{d\,r}\,\nu\right)-4\left(\frac{d}{d\,r}\,\lambda\right)e^{\nu}\right)r+\left(4-4\,e^{\lambda}\right)e^{\nu}\right)$$

$$/2\,r^2$$

Скаляр Риччи на `Maxima`

Для случая $\lambda(r)$, $\nu(r)$:

(%o23) $$e^{-\lambda}\left[\left(2\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\nu\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,\nu\right)^2-\left(\frac{d}{d\,r}\,\lambda\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,\nu\right)\right)r^2+\left(4\left(\frac{d}{d\,r}\,\nu\right)-4\left(\frac{d}{d\,r}\,\lambda\right)\right)r-4\,e^{\lambda}+4\right]/2\,r^2$$

Знаки в `Maxima` совпадают с Ландау-Лифшицем.