Семинар по релятивистской астрофизике. 10 апреля 2008

Рук. Блинников С.И.

19 апреля 2008 г.

Аннотация

С.Блинников. Геодезический лагранжиан. Орбиты в метрике Шварцшильда.

Н.Дунина. Замечание о червоточинах (wormholes).

Ниже будет смесь текстов на русском и английском: не всё успели перевести из разных источников. Но в этом есть даже своя польза – можно учить термины на обоих языках.

1 Геодезические

В искривленном пространстве любой размерности можно определять геодезическую как кривую, дающую экстремум расстояния между двумя точками:

$$l_{AB} = \int_{\xi_A}^{\xi_B} ds \ ,$$

– на геодезической длина l_{AB} есть экстремум по всем путям (траекториям, paths) $\xi(\lambda)$ из A в B. Здесь ξ – набор всех координат точки на кривой, а λ – параметр, описывающий положение точки $\xi(\lambda)$. Конечно, не только минимум длины может соответствовать геодезической. Например, между двумя точками на поверхности шара, т.е. на 2D-сфере: одна дуга большого круга даёт геодезическую с кратчайшей длиной (почти отрезок прямой, если точки близки), а другая дуга того же круга – это геодезическая с максимальной длиной среди всех дуг окружностей на сфере с концами в A и B. Но она же меньше по длине других путей, которые вокруг неё могут обвиваться. Т.е. уже в таком простейшем случае геодезическая - это нетривиальный экстремум. А в мире, т.е. в 4D

spacetime, всё ещё сложней из-за псевдоевклидовости. Для времениподобных путей (т.е. $ds > 0$ в нашей сигнатуре $+ - --$) геодезическая обычно – это *максимум* собственного времени (тот близнец, который живет на Земле и остаётся на геодезической, затратит больше собственного времени до встречи со своим ускоренным братцем, который улетает и возвращается на ракете).
Итак, мы имеем вариационную задачу

$$\delta l_{AB}[\text{путь}] = 0$$

для такого функционала:

$$l_{AB}[\text{путь}] = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{L(\lambda)} d\lambda,$$

где, выразив ds через параметр λ, мы ввели

$$L(\lambda) \equiv g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}.$$

Нередко обозначают для краткости

$$\dot{x^k} \equiv \frac{dx^k}{d\lambda}$$

так как часто можно принять λ равным времени (а в 4D мире мы будем проводить расчёты для времениподобных путей – тогда параметр λ может быть собственным временем τ). Но пока λ – произвольный параметр, кроме того, может появиться путаница с производной по координатному времени t. Поэтому попробуем другое обозначение:

$$\grave{x^k} \equiv \frac{dx^k}{d\lambda}$$

Ясно, что l_{AB} не меняется при заменах $\lambda \to \lambda(\tilde{\lambda})$. Пользуясь этой свободой можно подобрать такой параметр, что $L(\lambda) = \text{const}(\lambda)$. Так будет, например, если взять за параметр λ длину вдоль пути (или собственное время массивной частицы в 4D-мире). После этого условие постоянства $L(\lambda)$ сохранится и при замене $\lambda \to C\tilde{\lambda}+D$, т.е. при аффинных преобразованиях, только const изменится. Поэтому такое λ называют аффинным параметром.
To find an extremal let us look how the length l_{AB} changes for small variations of the path. To search for geodesics (i.e. paths with extremum distance), we

will do the usual calculus of variations treatment to seek extrema of the functional $l_{AB}[\text{path}]$.
We want to consider the change in the length δl_{AB} under infinitesimal variations of the path,

$$\begin{aligned} x^i &\rightarrow x^i + \delta x^i \\ g_{ik} &\rightarrow g_{ik} + \delta x^m \partial_m g_{ik} \ . \end{aligned}$$

Here

$$\partial_m g_{ik} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}$$

We consider first the variation δL,

$$\delta L = 2 g_{ik} \dot{x}^i \delta \dot{x}^k + \partial_m g_{ik} \delta x^m \dot{x}^i \dot{x}^k,$$

then

$$\delta \sqrt{L} = \frac{\delta L}{2\sqrt{L}}$$

and now let us use the freedom of choosing the parameter λ and take it such that for the original, undisturbed, path $L = 1$. Then the extremum condition for length $l = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{L} d\lambda$ is equivalent to getting extremals from the action

$$S = \int_a^b L d\lambda.$$

Докажем это построже. Нужно найти решения вариационной задачи

$$\delta l_{AB}[\text{путь}] = \delta \int_a^b \mathcal{L} d\lambda,$$

где $\mathcal{L} \equiv \sqrt{L}$. Уравнения Эйлера-Лагранжа для этой задачи

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^m} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^m} = 0.$$

Подставим $\mathcal{L} = \sqrt{L}$:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} \right) - \frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial x^m} = 0.$$

т.е.

$$-\frac{1}{2L} \frac{d\sqrt{L}}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} + \frac{1}{2\sqrt{L}} \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} - \frac{\partial L}{\partial x^m} \right) = 0.$$

Но

$$\frac{d\sqrt{L}}{d\lambda} = \frac{d\grave{s}}{d\lambda}, \quad \text{причём} \quad \grave{s} = \frac{ds}{d\lambda} = C \ ,$$

где C – та самая константа, которая возможна в переопределении аффинного параметра (и которая равна 1, если λ есть просто длина пути). Но производная от константы всегда нуль, значит $d\sqrt{L}/d\lambda = 0$ и

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \grave{x}^m}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^m} = 0.$$

Т.е. действительно, всё сводится к поиску экстремалей для "действия"

$$S = \int_a^b L d\lambda \ ,$$

они и будут геодезическими. Чтобы их найти, часто не нужно решать уравнения Эйлера-Лагранжа (ELE, Euler-Lagrange Equations) этой вариационной задачи – нередко оказывается, что интегралы этих уравнений очевидны. Будем помечать L для геодезических индексом s и называть L_s *геодезическим лагранжианом.*

Важно заметить, что при вариации путей (траекторий) мы описываем их разными функциями $x^i(\lambda)$, функции варьируются, но параметр λ – нет. Ещё заметим, что для нулевых геодезических (для путей фотонов) длина дуги s не может быть параметром, ведь $ds = 0$, и вариационный принцип $\delta \int_A^B ds = 0$ для них не имеет смысла, а принцип $\delta \int_A^B L_s d\lambda = 0$ вполне справедлив. Нужно только выбрать осмысленный параметр вдоль траектории фотона, например, такой, что $dx^i/d\lambda = \nu^i(\lambda)$ – параллельно переносимый вдоль пути касательный вектор, например, такой как 4-импульс. Такой параметр называют *каноническим*, его можно получить, сначала взяв другой параметр, например, 3D-длину вдоль искривленного луча света, а потом перенормировать. Пока не будем в это углубляться. Из геодезического лагранжиана всё и так получится волшебным образом.

Например, в плоском евклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ имеем

$$L_s = \grave{x}^2 + \grave{y}^2 + \grave{z}^2,$$

здесь L_s явно не зависит от x, y, z, так что

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \grave{x}^m}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L_s}{\partial \grave{x}^m} = \text{const},$$

и мы сразу получаем 3 интеграла $\grave{x} = \text{const} = u_1$, для x, и u_2, u_3 для y, z соответственно. При этом из условия экстремума длины мы получили условие постоянства направления касательной к геодезической. Это же верно в общем случае (экстремали длины являются и линиями неизменного направления). Следовательно,

$$x = a_1 + u_1\lambda, \quad y = a_2 + u_2\lambda, \quad z = a_3 + u_3\lambda,$$

а это просто прямая с параметром λ.
We can do this in 4D spacetime, when the flat space is not already Euclidean, it is a Minkowskian space. Yet everything is quite analogous if we properly treat the curves inside the light cone (time-like ones), outside it (space-like ones) and on the light cone (null geodesics). The Lorentz invariant interval is

$$s^2 = c^2\, t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

or, for small displacements,

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

This pseudo-Euclidean metric (since the sign of dt^2 is opposite to that of dx^2, dy^2, dz^2) is flat. In general case it may be "curved", if the metric tensor g_{ik} depends on space and time coordinates in a special way:

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(x)\, dx^i dx^k \equiv g_{ik}(x)\, dx^i dx^k,$$

with $g_{ik} = g_{ki}$. Let us consider a very important example of such curved space.
In a curved space we do not have a simple straight line, but we can find analytic solutions for geodesics even in a nontrivial case of a black hole.

2 Schwarzschild metric

Let us imagine that GR is not yet developed, but the idea of curved space, and motions on geodesics in the spacetime is tested by modern experimental equipment. Actually, when Lobachevsky discovered the first non-Euclidean geometry, early in XIX century in Russia, he already tried to measure the deviations from Euclid using geodesic terrestrial and astronomical observations, but the accuracy of the equipment in those days was far too low to find anything significant. Modern experiments on measuring distances and time on Earth and in Solar system show that the metric of 4D-spacetime is not exactly Minkowskian,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \ ,$$

in spherical coordinates centered on a spherical gravitating body (Earth or Sun), but with high accuracy it can be written as

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} - r^2 d\Omega^2 \ .$$

where r_g is some constant. In both cases the angular part of ds^2 is quite the same *by definition*, $r^2 d\Omega^2 \equiv r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \ d\varphi^2)$. This means that we use our yardsticks (based on radars or lasers and atomic clocks) in such a way, that we measure not the radial distance r to the gravitating center directly, but we measure first *circumferences* of length $\ell = 2\pi r$. What is found then for the radial distance (i.e. for $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$) at fixed time (i.e. for $dt = 0$) *with the same yardsticks* is not $d\ell/(2\pi)$, as it should be in Euclidean space, it is not dr, but $dr/\sqrt{1 - r_g/r}$. E.g. the physical distance between Mars and Earth is a bit larger than $\int dr$ gives (experiments by I.Shapiro et al.).
We can find the constant r_g in a following way. The metric is *asymptotically flat*, it becomes progressively Minkowskian as we go to $r \to \infty$. So our $L = g_{ik}\grave{x}^i\grave{x}^k$ tends to $L \to g_{00}c^2 - \mathbf{u}^2$ if we take the parameter λ simply as time t. For a particle in the Newtonian potential ϕ the Lagrangian is $\frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 - m\phi$, so our L will give the same trajectory for the particle if

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad \text{and for} \quad \phi = -\frac{GM}{r}.$$

Note that from ELE with $L = c^2 + 2\phi - \mathbf{u}^2$ we get of course the Newton's equation of motion

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\nabla\phi,$$

but do not forget that this is a *geodesic* in 4D spacetime.
E.g. in the constant gravity with acceleration g we can take $\phi = gz$ and get the famous parabola for gun bullets:

$$z = z_0 + u_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Do not forget that this is a *straight* line in spacetime! This means that even in weak gravity the spacetime is appreciably curved (warped), while the 3D (space) part of the world remains almost flat.
Now comparing $g_{00} = 1 - r_g/r \simeq 1 + 2\phi/c^2$ for large r we find

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3\frac{M}{M_\odot}\,\text{km},$$

and we see that g_{00} plays a role of ϕ in General Relativity. In strong gravity the one potential is not sufficient, and all 10 potentials g_{ik} are important – gravity is not a scalar, but a tensor force.

Thus we got the **Schwarzschild metric**,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \ ,$$

Later we will derive it from a fundamental principle.

3 Orbits in Schwarzschild field

Now we use the Schwarzschild metric to find the geodesics. We have

$$L_s = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$$
$$-r^2\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \sin\theta^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \ .$$

We see that L_s does not depend explicitly on φ, hence from Euler-Lagrange Equation (ELE)

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L_s}{\partial \dot{x}^m}\right) - \frac{\partial L_s}{\partial x^m} = 0,$$

при $m = 3, \quad x^m \equiv \varphi$, и из $\partial L_s/\partial\varphi = 0$ имеем

$$\frac{\partial L_s}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} = r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{d\lambda} \ .$$

If we take the ELE for θ we see that in general we have some oscillations, $\dot{\theta} \neq 0$, but for

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

we find $\dot{\theta} = 0$, and θ remains constant. Invariance under spatial rotations implies conservation of the three components of angular momentum. Conservation of the direction of angular momentum means that the particle will move in a plane. We always can take the latter to be the equatorial plane of our coordinate system. Since $\sin\theta = 1$ along the geodesics with our choice of the equatorial plane,

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \text{const} \equiv J \ ,$$

i.e. the angular momentum per unit mass of a massive particle. But this quantity is conserved for a massless particle as well (of course, as we discussed, we cannot take the proper time as λ then, another parameterization is needed). Note that the constancy of J is the GR equivalent of Kepler's second law (equal areas are swept out in equal times).

Independence of L_s on t, i.e. $\partial L_s/\partial t = 0$ in ELE leads to conservation of 'energy'

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = E \ .$$

For massive particles E is the energy per unit mass of the particle (and can be thought of as energy of a massless one).
Together J and E help to describe all orbits of particles in the Schwarzschild geometry. But we need one more integral. If we treat L_s as a 'Lagrangian' with 'time' λ, we see that a 'Hamiltonian'

$$H_s = \sum \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L_s = L_s,$$

and since there is no explicit dependence on 'time' λ, L_s itself must be constant (let us denote it by ϵ)

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \epsilon \ .$$

While E and J are related to the components of 4-momentum of a particle this is related to its mass. For a massive particle we can take $\lambda = \tau$, and this is just $\epsilon = g_{mn}u^m u^n = +1$. For a massless particle we always have $\epsilon = 0$.
Below is a rather standard material on orbits and I rewrite it from a nice WWW book by Carroll (1997) just slightly modifying.
Multiply by $(1 - r_g/r)$ and use expressions for E and J to get

$$E^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{J^2}{r^2} + \epsilon\right) = 0 \ ,$$

which can be written as

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = E^2 \ ,$$

with

$$V(r) = \left(\epsilon - \epsilon\frac{r_g}{r} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{r_g J^2}{r^3}\right) \ .$$

So equation for the radial displacements of the particle along its orbit looks as the equation for a classical particle of unit mass and "energy" E^2 moving in a one-dimensional potential $V(r)$. (The true energy per unit mass is E, but the effective potential for the coordinate r corresponds to E^2.)
To describe the orbit we need not only $r(\lambda)$, but also $t(\lambda)$ and $\phi(\lambda)$, but with the help of $V(r)$ we understand a lot. In the potential $V(r)$ the first term is just a constant, the second term corresponds exactly to the Newtonian gravitational potential, and the third term is a centrifugal potential. The last term is very

important at small r, it tells that the gravity is much stronger there than in Newton's theory.
There are different curves $V(r)$ for different values of J; for any one of these curves, the behavior of the orbit can be judged by comparing the E^2 to $V(r)$. The general behavior of the particle will be to move in the potential until it reaches a "turning point" where $V(r) = E^2$. Sometimes there may be no turning point. In some cases the particle may simply move in a circular orbit at radius $r_c = \text{const}$; this happens at extrema of V, i.e. at $dV/dr = 0$. Differentiating V we find that the circular orbits occur when

$$\epsilon r_g r_c^2/2 - J^2 r_c + (3/2) r_g J^2 \gamma = 0 \ ,$$

where $\gamma = 0$ in Newtonian gravity and $\gamma = 1$ in GR. Circular orbits will be stable if they correspond to a minimum of the potential, and unstable at a maximum.
In Newtonian gravity circular orbits appear at

$$r_c = \frac{J^2 c^2}{\epsilon G M} \ .$$

For massless particles $\epsilon = 0$, and there are no circular orbits.
In GR the situation is different, but only for r sufficiently small. Since the difference resides in the term $-r_g J^2/r^3$, as $r \to \infty$ the behaviors are identical in the two theories. But as $r \to 0$ the potential goes to $-\infty$ rather than $+\infty$ as in the Newtonian case. At $r = r_g$ the potential is always zero; inside this radius is the black hole. (Units of length $2GM/c^2$ are used there in the figure with $r_g = 1$). For massless particles there is always a barrier (except for $J = 0$, for which the potential vanishes identically), but a sufficiently energetic photon will nevertheless go over the barrier and be dragged down to the center. (Note that "sufficiently energetic" means "in comparison to its angular momentum" – in fact the frequency of the photon is immaterial, only the direction in which it is pointing.) At the top of the barrier there are unstable circular orbits. For $\epsilon = 0$, $\gamma = 1$, we can easily solve to obtain

$$r_c = (3/2) r_g \ .$$

This is borne out by the figure, which shows a maximum of $V(r)$ at $r = (3/2) r_g$ for every J. This means that a photon can orbit forever in a circle at this radius, but any perturbation will cause it to fly away either to $r = 0$ or $r = \infty$.
For massive particles there are once again different regimes depending on the angular momentum. The circular orbits are at

$$r_c = \frac{J^2 \pm \sqrt{J^4 - 3 r_g^2 J^2}}{r_g} \ .$$

For large J there will be two circular orbits, one stable and one unstable. In the $J \to \infty$ limit their radii are given by

$$r_c = \frac{J^2 \pm J^2(1 - 3r_g^2/2J^2)}{r_g} = \left(\frac{J^2c^2}{GM}, \frac{3GM}{c^2}\right) .$$

In this limit the stable circular orbit becomes farther and farther away, while the unstable one approaches $3GM/c^2$, behavior which parallels the massless case. As we decrease J the two circular orbits come closer together; they coincide at

$$J = \sqrt{3}r_g ,$$

for which

$$r_c = 3r_g ,$$

and disappear entirely for smaller J. Thus, $3r_g$ is the smallest possible radius of a stable circular orbit in the Schwarzschild metric. There are also unbound orbits, which come in from infinity and turn around, and bound but noncircular ones, which oscillate around the stable circular radius. Note that such orbits, which would describe exact conic sections in Newtonian gravity, will not do so in GR, although we would have to solve the equation for $d\phi/dt$ to demonstrate it. Finally, there are orbits which come in from infinity and continue all the way in to $r = 0$; this can happen either if the energy is higher than the barrier, or for $J < \sqrt{3}r_g$, when the barrier goes away entirely.
We have therefore found that the Schwarzschild solution possesses stable circular orbits for $r > 3r_g$ and unstable circular orbits for $(3/2)r_g < r < 3r_g$.

3.1 Иллюстрации

См. ниже картинку для потенциала из книги Шапиро и Тюкольского, и Новикова и Фролова. Обозначения слегка другие, но очевидные. А также из последней книжки типы орбит для разных энергий, указанных на предыдущем рисунке.

3.2 Эксперименты по проверке ОТО

Most experimental tests of general relativity involve the motion of test particles in the solar system, and hence geodesics of the Schwarzschild metric; this is therefore a good place to pause and consider these tests. Einstein suggested

three tests: the deflection of light, the precession of perihelia, and gravitational redshift.
Четвертым тестом в Солнечной системе часто называют эффект Шапиро. Может быть, рассмотрим его позднее.
The major axis of Mercury's orbit must precess at a rate of 42.9 arcsecs every 100 years according to GR. The observed value is 5601 arcsecs/100 yrs. However, much of that is due to the precession of equinoxes in our geocentric coordinate system: 5025 arcsecs/100 yrs. The gravitational perturbations of the other planets contribute an additional 532 arcsecs/100 yrs, leaving 43 arcsecs/100 yrs to be explained by GR, which it does quite well.

4 Из предыдущих семинаров

Мы уже обсуждали значение радиуса Шварцшильда $r_g = 2M \sim 3$ км для Солнца в геометрических единицах или $r_g = 2GM/c^2$ в обычных единицах. Оно получается, если будем применять выражение $g_{00} = 1+2\phi$ для слабого поля, (его мы уже знаем) и подставим $\phi = -M/r$. Видно, что при $r = 2M = r_g$ получаем $g_{00} = 0$. Т.е. бесконечное замедление времени с точки зрения далёкого наблюдателя. Конечно, это уже не слабое поле, но оказывается, что всё так и в сильном сферически-симметричном поле в ОТО. Это мы скоро выведем строго.
Наташа Дунина-Барковская ещё пару семинаров назад оценила Планковскую плотность, а я написал определение Планковской массы M_{Pl} – её радиус Шварцшильда равен комптоновскому радиусу:

$$\frac{2GM_{Pl}}{c^2} \approx \frac{\hbar}{M_{Pl}c}$$

Получим $M_{Pl} \equiv \sqrt{(}\hbar c/G) \sim 2 \cdot 10^{-5}$ грамм или $\sim 10^{19}$ ГэВ.
Я показывал на диаграмме (t, r) как при коллапсе образуется поверхность, за которую не может вылететь фотон или нейтрино, рожденные в центре звезды - эта поверхность и есть горизонт событий. Это не просто сфера постоянного радиуса, а 3-мерная поверхность в 4-мерном мире. Она возникает , имея нулевой радиус в какой-то момент, и только асимптотически её радиус стремится к r_g.

5 Наташа Дунина-Барковская. Wormholes as Black Hole Foils

Это по работе `http://arxiv.org/abs/0704.2667`.

"Wormholes as Black Hole Foils"("Кротовые норы как имитаторы черных дыр") Авторы Thibault Damour, and Sergey N. Solodukhin
arXiv:0704.2667v1 [gr-qc] 20 Apr 2007

5.1 Введение

Одним из наиболее замечательных предсказаний эйнштейновской теории гравитации является существование черных дыр. Хотя эти объекты впервые появились в знаменитом точном сферически симметричном решении Карла Шварцшильда [1] через несколько месяцев после того, как Эйнштейн закончил создание своей теории, но многие физики работали в течение долгих лет, чтобы создать чёткую концепцию черной дыры (см., например, [2]). В течение долгого времени часть физического сообщества весьма скептически относилась к фактическому существованию черных дыр, но ситуация изменилась в последние годы, в основном благодаря различным астрономическим наблюдениям: в рентеновских двойных системах, в ядрах галактик (в том числе нашей Галактики) и пр. Обзор астрономических свидетельств о существовании черных дыр приведен в [3].
В настоящее время черные дыры являются частью основного "набора инструментов" физиков и астрофизиков, и их существование в реальной вселенной принимается за данность. Однако интересно критически исследовать вопрос о том, до какой степени нынешние или будущие астрофизические данные могут дать наблюдательное подтверждение существования черных дыр. Фактически, черные дыры - это сложные теоретические конструкции со многими наблюдательными свойствами, и каждое из наблюдательных подтверждений обычно относится к одному конкретному свойству. Например, во многих наблюдениях кандидаты в черные дыры обычно выбираются потому, что их предполагаемая масса превосходит некий теоритетический предел, или на основании их сильного внешнего гравитационного поля. Некоторые авторы утверждают, что в некоторых наблюдениях исследованы или будут исследованы более характерные особенности черных дыр, в особености существование горизонта событий. Например, Нараян и его сотрудники утверждали, что в некоторых случаях у кандидата в черные дыры "отсутствует поверхность", т.е. у него должен существовать горизонт событий [3, 4]. С другой стороны, часто также утверждается, что будущие данные по гравитационным волнам от LIGO/Virgo/GEO докажут существование черных дыр и подтвердят их уникальные свойства либо посредством наблюдения характерных "квази-нормальных мод" (QNM) сигнальных частот недавно образованной черной дыры [5], либо посредством наблюдательных прове-

рок “уникальной” структуры геометрии черной дыры, гарантированной теоремами об отсутствии “волос” [6, 7].
Хорошо известная и полезная стратегия оценки того, в какой степени наблюдения могут реально характеризовать присутствие черных дыр в рамках ОТО, состоит в том, чтобы рассмотреть “имитаторы черных дыр”, т.е. теоретические объекты, которые имитируют некоторые аспекты черных дыр, в то же время не обладая некоторыми из их характерных особенностей. Некоторые примеры применения этой стратегии рассматривались в прошлом. Например, возможные черные дыры в биметрической теории гравитации Розена [8], или, в более недавнее время, некоторые модели “гравзвезд” [9].
В данной заметке мы рассмотрим очень простую разновидность имитатора черной дыры - кротовую нору [10]. Хотя кротовая нора не имеет горизонта событий и в принципе отличается от черной дыры по некоторым другим существенным свойствам, мы продемонстрируем здесь, что если определенный параметр, входящий в определение кротовой норы, достаточно мал, то кротовая нора в астрофизическом отношении практически неотличима от черной дыры. Наше окончательное заключение состоит в том, что, возможно, уникальный способ убедительного подтверждения наличия черной дыры (с горизонтом событий) состоит в наблюдении ее излучения Хокинга [11]. И даже это заключение требует некоторых оговорок, поскольку мы увидим, что некоторые свойства кротовых нор имеют тенденцию имитировать квантовый спектр черных дыр, поэтому возможно, что некоторые (подлежащие определению) механизмы образования кротовых нор могли бы привести к излучению типа Хокинга.

5.2 Wormhole metric

We shall consider here a very simple type of wormhole spacetime, as described by the metric

$$ds^2 = (g(r) + \lambda^2)dt^2 - \frac{dr^2}{g(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \tag{1}$$

where $g(r) \equiv 1-2GM/r$. This metric differs from the standard Schwarzschild metric only through the presence of the dimensionless parameter λ. When $\lambda = 0$ we recover a black hole of mass M with an event horizon located at the radius $r = 2GM$. By contrast, when $\lambda \neq 0$ the structure of the spacetime is dramatically different: there is no event horizon, instead there is a throat at $r = 2GM$ that joins two isometric, asymptotically flat regions. This spacetime is an example of a Lorentzian wormhole [10]. In three dimensions a similar modification of the black hole metric was studied by Solodukhin [12] in an attempt to restore Poincaré recurrences in black holes. The parameter λ in the latter construction was chosen to be exponentially small

$$\lambda \sim e^{-4\pi GM^2} \tag{2}$$

in order to reproduce the expected dependence of the Poincaré recurrence time on the entropy of a black hole. Though we shall leave free the value of λ in this paper, and discuss what range of values for λ is compatible with present and foreseeable observations, we will see below that exponentially small values of the type of (2) seem indeed adequate for mimicking not only the classical, but also the quantum properties of a Schwarzschild black hole. The event horizon of the original black hole metric is replaced, in the wormhole metric (1), by a high-tension distribution (a kind of *brane*) localized in a thin shell around the center of the *throat* at $r = 2GM$. More precisely, with our simplifying choice of wormhole metric (1), the stress-energy tensor distribution sustaining the throat has vanishing energy density, but comprises radial and tangential tensions proportional to $1/\lambda^2$.

5.3 Литература

[1] K. Schwarzschild, "On The Gravitational Field Of A Mass Point According To Einstein's Theory,"Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 1916 (1916) 189; see English translation in arXiv:physics/9905030.
[2] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, "Gravitation,"San Francisco 1973, 1279p
[3] R. Narayan, "Black Holes in Astrophysics,"New J. Phys. 7, 199 (2005) [arXiv:gr-qc/0506078].
[4] A. E. Broderick and R. Narayan, "On The Nature of the Compact Dark Mass at the Galactic Center Astrophys. J. 638, L21 (2006) [arXiv:astro-ph/0512211].
[5] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, "Quasi-normal modes of stars and black holes,"Living Rev. Rel. 2, 2 (1999) [arXiv:gr-qc/9909058].
[6] F. D. Ryan, "Gravitational waves from the inspiral of a compact object into a massive, axisymmetric body with arbitrary multipole moments Phys. Rev. D 52, 5707 (1995).
[7] S. A. Hughes, "Trust but verify: The case for astrophysical black holes in: Proceedings of 33rd SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI 2005): Gravity in the Quantum World and the Cosmos, Menlo Park, California, 25 Jul - 5 Aug 2005, pp L006 [arXiv:hep-ph/0511217].
[8] W. R. Stoeger, "Orbital Topography And Other Astrophysical Consequences Of Rosen's Bimetric Theory Of Gravity,"Gen. Rel. Grav. 9, 165 (1978). 12

[9] A. E. Broderick and R. Narayan, "Where are all the gravastars? Limits upon the gravastar model from accreting black holes,"Class. Quant. Grav. 24, 659 (2007) [arXiv:gr-qc/0701154].
[10] M. Visser, "Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking,"Woodbury, USA: AIP (1995) 412 p
[11] S. W. Hawking, "Particle Creation By Black Holes,"Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975) [Erratum-ibid. 46, 206 (1976)].
[12] S. N. Solodukhin, “Restoring unitarity in BTZ black hole,” Phys. Rev. D **71**, 064006 (2005) [arXiv:hep-th/0501053]; “Can black hole relax unitarily?,” arXiv:hep-th/0406130.