

Фундаментальная физика и астрономия



Блинников С.И. (ИТЭФ – ККТЭФ – и ЦФПИ ВНИИА)
Вводная лекция 3 – ИТЭФ для МФТИ

16.02.2023

О переводе текста лекций



[https://urait.ru/book/
osnovy-relyativistskoy-astrofiziki-518300](https://urait.ru/book/osnovy-relyativistskoy-astrofiziki-518300)
Основы релятивистской астрофизики : учебное пособие для вузов
С. И. Блинников. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 221 с.

План

- ▶ Теорема вириала в квантовой и классической физике
- ▶ Температуры и плотности внутри звёзд
- ▶ Типы звёздного населения
- ▶ ТМ и расширение Вселенной

Потенциал и потенциальная энергия

$$\phi(r) := \frac{(-G_N) M}{r} \quad (\% \text{ o2})$$

потенциал отрицательный, потому что потенциальная энергия $m^* \phi$ растёт с r , а на бесконечности удобно считать ϕ нулём. Производная (точнее градиент) потенциала даёт силу, но гораздо важнее не сила, а изменение энергии – работа. Для Кулона

$$\phi_Q(r) := \frac{(+)}{r} q$$

Virial theorem – Теорема вириала

From Fock (1930), см. Базь, Зельдович, Переломов

$$\delta E_{\text{tot}} \equiv \delta \mathcal{E} = \delta \langle H \rangle = 0$$

in the first order of perturbation $\delta\psi$ – the variational principle in quantum case.

Любая система стремится к минимуму потенциальной энергии (пример - трясём мешок с картошкой). Равновесие всегда – экстремум этой энергии, необязательно минимум. Полная энергия не сохраняется при стремлении к равновесию – часть излучается, как в звезде.

Но интересно посмотреть и на последствия экстремума полной энергии.

Имеем

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle + \langle U \rangle.$$

Пусть R_0 – равновесный размер системы, и

$$\alpha \equiv \frac{R_0}{R}$$

Тогда

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle \rightarrow \alpha^2 \langle E_{\text{kin}} \rangle$$

так как для нерелятивистских (NR) частиц

$$E_{\text{kin}} \propto p^2 \propto 1/\lambda^2$$

Вариация U зависит от закона взаимодействия. Для кулоновских и ньютоновских взаимодействий

$$\langle U \rangle \propto \sum_{i \neq k} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \rightarrow \alpha \langle U \rangle.$$

Для Кулона вместо m_i пишем q_i .

Thus

$$\langle \mathcal{E} \rangle \rightarrow \alpha^2 \langle E_{\text{kin}} \rangle + \alpha \langle U \rangle,$$

and variation of this gives

$$\delta \langle \mathcal{E} \rangle = 2\alpha \delta \alpha \langle E_{\text{kin}} \rangle + \delta \alpha \langle U \rangle = 0,$$

so with $\alpha = 1$ for unperturbed state we find

$$2\langle E_{\text{kin}} \rangle + \langle U \rangle = 0.$$

This is the virial theorem for atomic Coulomb potential (and for globular stellar clusters as well! See the use of Schrödinger Eq. for stellar dynamics in Widrow & Kaser, 1993, Johnston, Lasenby, and Hobson (2009).

For all those systems (NR atoms or plasma, NR stars and stellar clusters)

$$\mathcal{E} = \langle E_{\text{kin}} \rangle + \langle U \rangle = -\langle E_{\text{kin}} \rangle$$

so the **loss** of total energy \mathcal{E} corresponds to the **growth** of the kinetic energy $\langle E_{\text{kin}} \rangle$. The same is true for the internal energy of matter if it is in the form of kinetic energy of particles.

One can do $U \propto r^k$, but more important for us is extremely relativistic (ER) case: $E_{\text{kin}} \propto p \propto 1/\lambda$, then

$$\mathcal{E} = \langle E_{\text{kin}} \rangle + \langle U \rangle = 0.$$

Почему для ER случая $E_{\text{kin}} \propto p$? Возьмём фотоны, у них $E = h\nu = \hbar\omega$, длина волны c/ν , и импульс по формулам де Бройля $p = E/c$. На самом деле де Бройль из опыта это знал – опыты Лебедева.

Now let us consider non-interacting particles in a potential well. From Schrödinger Eq. for NR particles (and also for classical objects!) if $U \propto r^k$ we find in the same way as above:

$$2\langle E_{\text{kin}} \rangle - k\langle U \rangle = 0.$$

If $k = -1$ we have Coulomb and Newton, $k = 2$ - a harmonic oscillator.

Частицы (волны!) в потенциальных ямах

The case $k \rightarrow +\infty$ corresponds to a hard reflecting wall, then $\langle U \rangle$ tends to zero relative to $\langle E_{\text{kin}} \rangle$, but the variation of $\langle U \rangle$ is always of the same order as the variation of $\langle E_{\text{kin}} \rangle$. Since the 'force' on the particle is $-\nabla U$, we define pressure P (i.e. the 'force' on unit area, $A = 1$, of the wall) so as

$$\delta\langle U \rangle = PA\delta x = P\delta V.$$

For our variations $V \rightarrow V/\alpha^3$, and when we express variations of H again through α , we get

$$2\langle E_{\text{kin}} \rangle - 3PV = 0,$$

i.e. the same relation as in classical derivation:

$$P = \frac{2\langle E_{\text{kin}} \rangle}{3V}$$

СВЯЗЬ $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ И kT

$$P = \frac{2\langle E_{\text{kin}} \rangle}{3V} \equiv \frac{2}{3}\varepsilon$$

и

$$P = nkT = kT \frac{N}{V}$$

отсюда

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2}kT \cdot N$$

Теперь легко оценить, на каком расстоянии от ядра иона электростатическая потенциальная энергия электрона становится порядка kT – радиус Дебая. Отсюда оценка идеальности плазмы.

Pressure

For NR:

$$P = \frac{2}{3}\varepsilon$$

and

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{thermal}} = \frac{3}{2} \int P dV$$

For ER:

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon$$

and

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{thermal}} = 3 \int P dV$$

and always

$$3 \int P dV + \langle U \rangle = 0$$

Теорема вириала для электрона в атоме

$$2\langle E_{\text{kin}} \rangle + \langle U \rangle = 0.$$

$$mv^2 = \frac{mZe^2}{r}$$

Учтём момент импульса электрона:

$$m|v|r = p \cdot r \sim \hbar$$

так как $r \sim \lambda$ – де Бройль. Можно справа на $n = 1, 2, 3, \dots$ умножить.

Умножим обе части вириального равенства на mr^2 , найдём r и

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = \frac{-Ze^2}{2r} = \frac{-(Ze^2)^2 m}{2\hbar^2}$$

Температура в звезде – через теорему вириала

$$3 \int P dV + \langle U \rangle = 0, \quad \Rightarrow \text{оценка} \quad PR^3 \sim \frac{G_N M^2}{R}$$

Если у нас классический идеальный газ (плазма):

$$P = nkT = \mathcal{R}\rho T/\mu,$$

где $\mathcal{R} = N_A k = 8.314 \times 10^7$ эрг/(г · К) – универсальная газовая постоянная, а $\mu \simeq 1$ – средняя молекулярная масса (с учётом электронов), то

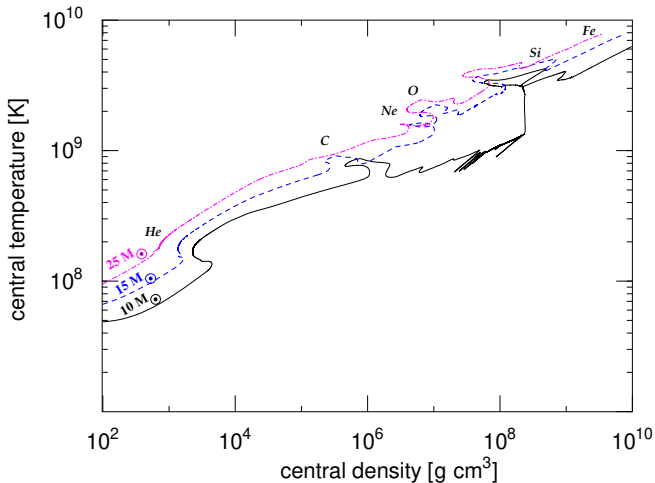
$$T_c \simeq \frac{G_N M^{2/3} \rho_c^{1/3} \mu}{\mathcal{R}}.$$

Итак,

$$T_c \propto M^{2/3} \rho_c^{1/3}$$

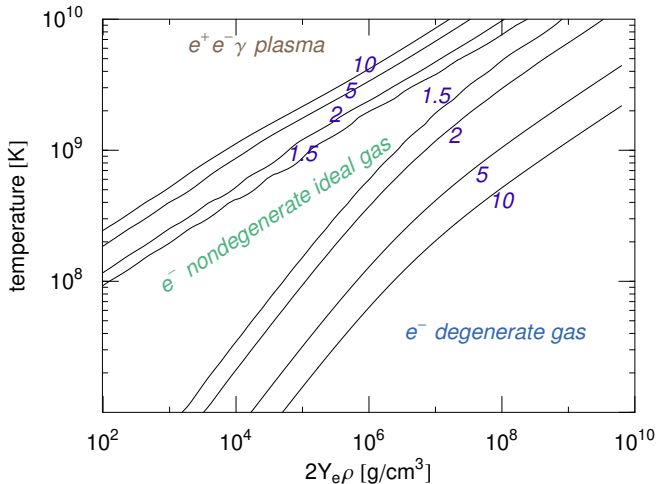
Ту же степень 1/3 получим для массивных звёзд, в давлении которых преобладает вклад фотонов (aT^4), но зависимость от массы будет тогда $M^{1/6}$).

Полные расчёты для реальных звёзд



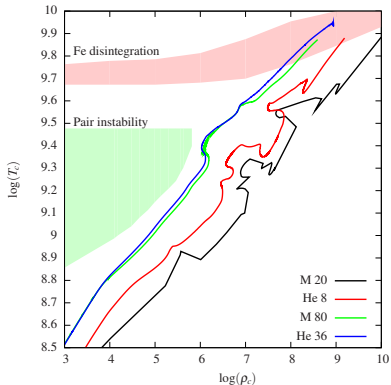
Standard model evolution of the central temperature and density for a $25 M_{\odot}$, $15 M_{\odot}$ and $10 M_{\odot}$ star. The different burning stages are indicated by the corresponding chemical symbol.

Полезно тут же увидеть свойства газа



The contours of the ratio $P_{e+\gamma}/P_{e,i.g.}$ of the combined electron and photon pressure $P_{e+\gamma}$ to the corresponding electron ideal gas pressure, $P_{e,i.g.} \equiv n_e kT$, as a function of temperature and density,

Massive stars and their He-cores



Each line is labeled “M” for stellar models and “He” for He-core models, followed by the mass of the model or of the core. **Here are stars that reach core collapse avoiding pair instability.**

3 outcomes of pair-instability

Here are only He-core models, labeled by “He” and the mass of the core. They all reach pair instability, subsequently experiencing 1) **pulsations** (He48), 2) **complete disruption** (He80), or 3) **direct collapse** (He160).

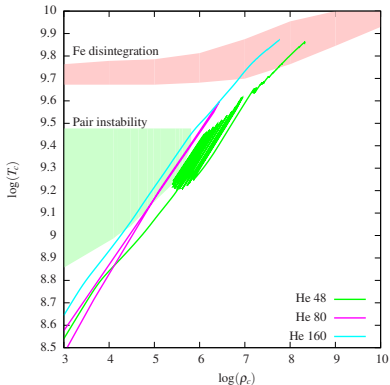
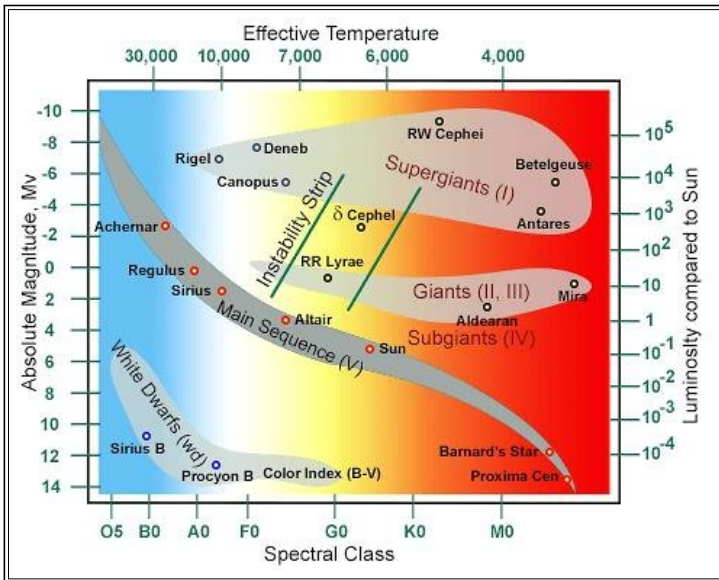
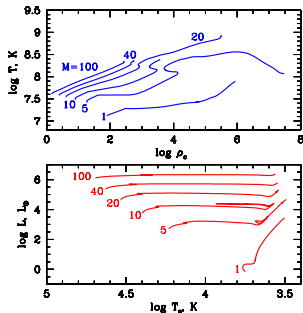


Диаграмма Герцшпрунга-Рессела

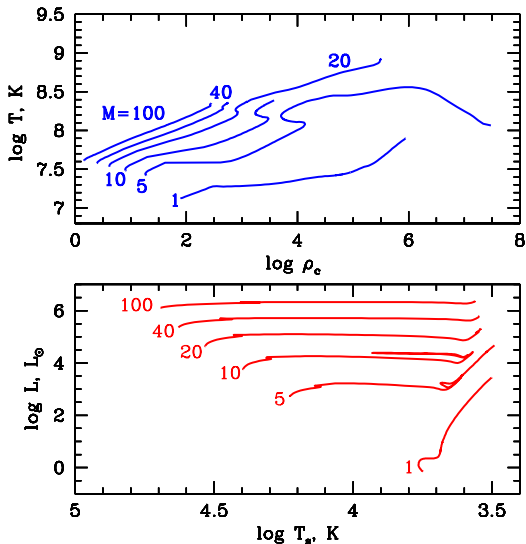


Неустойчивость при рождении пар и SNe

Для того, чтобы понять механизм взрыва сверхновых из-за неустойчивости при рождении пар, нужно немного изучить теорию звездной эволюции. Рисунок показывает эволюционные треки нормальных звезд разных масс. Эволюция на диаграмме центральная температура - центральная плотность (верхняя панель) и диаграмма Герцшпрунга-Рессела (нижняя панель) для нескольких моделей нормальных звёзд. Числа возле треков – это массы звёзд в единицах массы Солнца M_{\odot} .

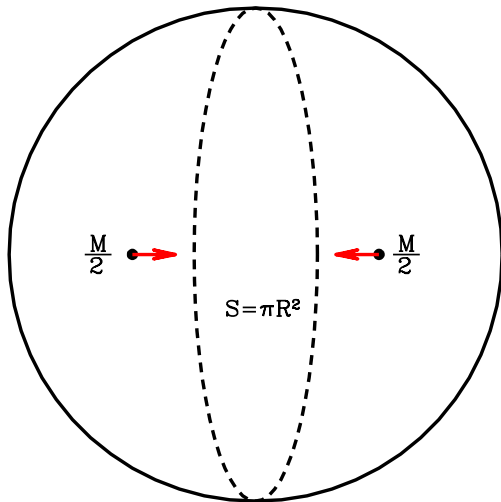


Замечаем: T_c растёт с ρ_c как $T_c \propto \rho_c^{1/3}$.



Этот закон является более выраженным для более массивных звезд. Такое соотношение легко понять из условий механического равновесия звезды.

Разделим звезду на две половинки



Механическое равновесие звезды

Очень грубая оценка по порядку величины для силы притяжения двух половинок звезды с полной массой M даёт

$$F \sim \frac{G_N M^2}{4R^2},$$

где R – радиус звезды, а G_N – постоянная Ньютона. Эта сила должна быть уравновешена градиентом давления P в звезде, которая находится в механическом равновесии.

Давление P практически равно нулю на поверхности, а в центре

$$P_c = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2}.$$

Условия в центре звезды

Опуская все коэффициенты порядка единицы, получаем для давления и плотности в центре:

$$P_c \simeq \frac{G_N M^2}{R^4},$$

$$\rho_c \simeq \frac{M}{R^3},$$

и находим, что равновесие требует (в **НЬЮТОНОВСКОЙ гравитации**):

$$P_c \simeq G_N M^{2/3} \rho_c^{4/3}.$$

Адиабата

4. Адиабатический процесс (ИЗОЭНТРОПИЙНЫЙ ($\Delta S = 0$, $S = \text{const}$)).

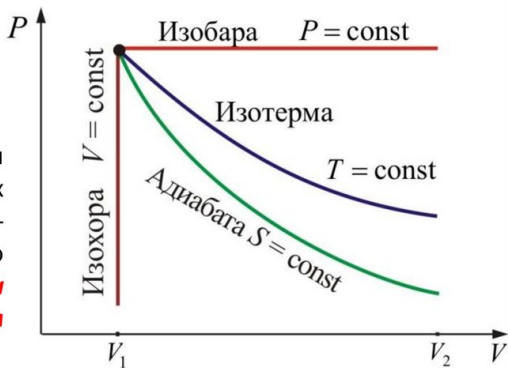
Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.

Уравнение адиабаты:

$$V^\gamma P = \text{const}$$

где γ – показатель адиабаты.

На рис. показаны графики различных изопроцессов в PV -координатах. Как видно из рисунка, **адиабата идет круче, чем изотерма.**



Показатель адиабаты

В школьной физике любят писать для изотермы

$$PV = \text{const}$$

Для адиабаты

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Гораздо удобней записывать адиабату через плотность

$$\rho = M/V:$$

$$P = \text{const} \cdot \rho^\gamma$$

Давление – поток импульса

Поток числа частиц, если скорость v_x :

$$n \equiv \frac{N}{V}, \quad \text{поток} = nv_x, \quad \text{штуки/см}^2/\text{сек}$$

Поток массы ρv_x – г/см²/сек

Поток энергии εv_x – эрг/см²/сек

Сила F – это изменение импульса в единицу времени.

Пусть за время Δt до стенки S долетает N частиц:

$$N = nv_x \Delta t S$$

Тогда изменение импульса $2p_x N$ при упругом ударе.

$$F_x \Delta t = PS \Delta t = 2p_x N = 2p_x n v_x \Delta t S$$

$$P \propto n p_x v_x$$

Показатель адиабаты нерелятивистского газа

Поток импульса

$$np_x v_x \propto \frac{F}{S} = P$$

Но $p_x = mv_x$, тогда $P \propto np^2/m$, а по де Бройлю $p = \hbar/\lambda$.

В адиабатическом процессе все частицы остаются на своих квантовых уровнях (!!!).

Тогда $\lambda \propto R$, получаем $P \propto np^2 \propto 1/R^5 \propto 1/V^{5/3} = \rho^{5/3}$, т.е. мы нашли $\gamma = 5/3$ для нерелятивистских частиц.

Релятивистские частицы дают $\gamma \rightarrow 4/3$

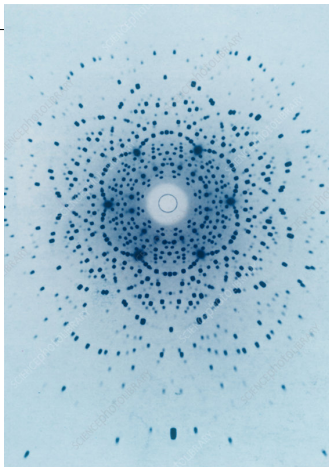
$$np_x v_x = np_x c \propto P \propto \frac{1}{R^4}$$

так как в адиабатическом процессе все частицы остаются на своих квантовых уровнях, опять же $\lambda \propto R$, но $P \propto np \propto 1/R^4 \propto 1/V^{4/3} = \rho^{4/3}$,

В радиационно доминированной плазме $\gamma \sim 4/3$, т.е. при высокой удельной энтропии S в давлении преобладают фотоны, и могут появляться пары e^+e^- . В космологии горячей вселенной – пары любых частиц.

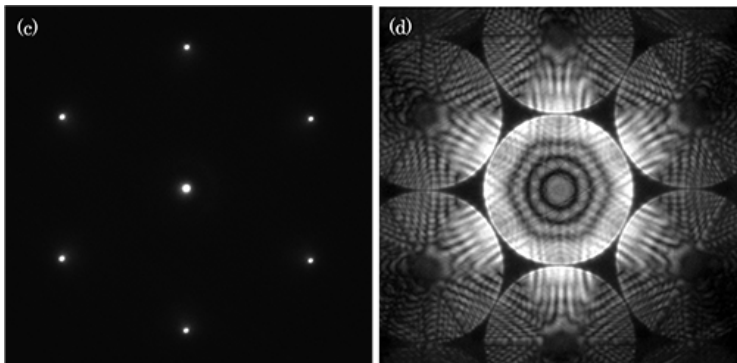
При низкой $S \rightarrow 0$ имеем $\gamma \rightarrow 4/3$ благодаря **высокой энергии Ферми вырожденных** электронов при высокой плотности ρ .

Вспомним, что все частицы – не шарики, а волны



Здесь рентген, X-rays, рассеяние на кристалле бериллия

А здесь – пучок электронов



Рассеяние электронов на кристалле кремния

On hydrodynamical instability

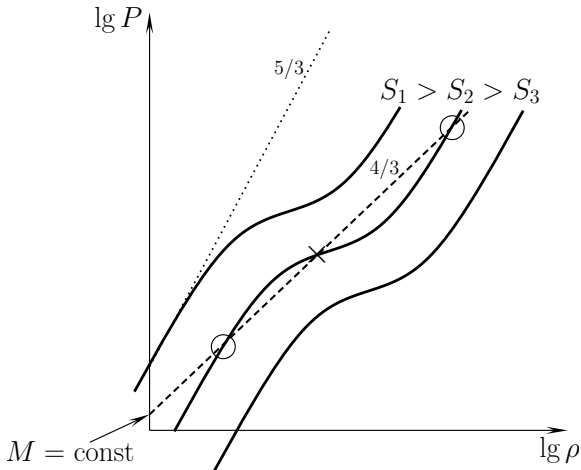
Условие механического равновесия (в **НЬЮТОНОВСКОЙ гравитации**):

$$P_c \simeq G_N M^{2/3} \rho_c^{4/3}.$$

тут же говорит нам нечто важное о гидродинамической устойчивости звезды. Оно означает, что снижение показателя адиабаты до $\gamma < 4/3$ может привести к гидродинамической неустойчивости. (А воздух устойчив при $\gamma > 0$!) Действительно, если $\gamma < 4/3$, то глобальное сжатие звезды приводит к слишком слабому росту физического давления, **ниже** того, которое необходимо для равновесия. Тогда сила тяжести одерживает победу над давлением, и звезда начинает рушиться, т.е. коллапсировать.

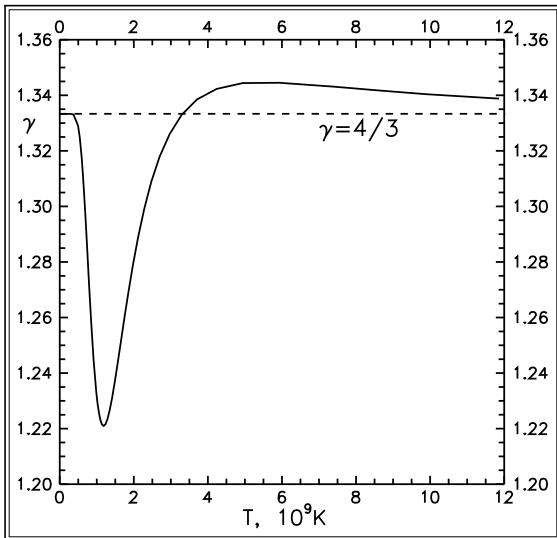
Hydrodynamical stability

Mechanical stability



Adiabatic γ for pair creation

D.K.Nadyozhin 1974, see SB,Dunina-Barkovskaya,DKN, 1996, ApJS



Белые карлики

Из наблюдений известно, что массы белых карликов порядка солнечной, но размеры составляют лишь сотую часть солнечного радиуса (и даже меньше), т.е. белые карлики представляют собой звезды с чрезвычайно большой плотностью вещества $\rho \sim 10^5 - 10^9 \text{ г/см}^3$. В таком состоянии обычные атомы разрушаются, а вещество состоит из ядер и свободных электронов, которые подчиняются статистике Ферми–Дирака.

Вырожденный электронный газ

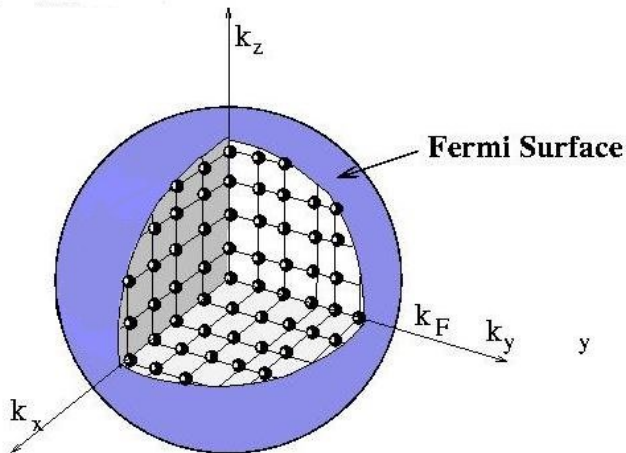
Получим уравнение состояния для вещества белых карликов. В импульсном пространстве число клеток (состояний) в 1 см^3 равно $dn = d^3p / (2\pi\hbar)^3$, где $(2\pi\hbar)^3$ – объем одной клетки (фазовой ячейки). Согласно статистике Ферми–Дирака, в одном состоянии может находиться только один электрон, и полное число электронов N , заключенное в фазовом объеме

$$V_p = \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{4\pi}{3} p_F^3, \text{ с учетом спина равно}$$

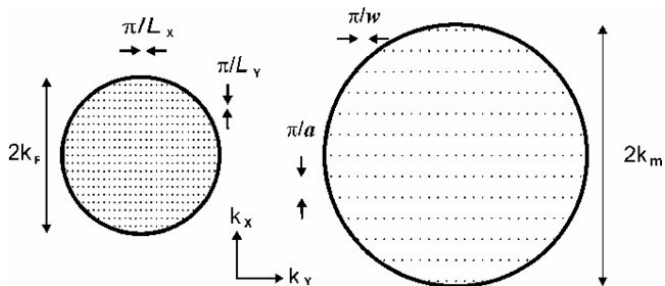
$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} V_p.$$

Здесь p_F – граничный импульс Ферми, выше которого при $T = 0$ все уровни свободны.

Поверхность Ферми – сфера в идеальном газе



Сечение поверхности Ферми



Итак, число электронов в одном кубическом сантиметре

$$N = \frac{2}{(2\pi \hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3.$$

Удобно выражать p_F в единицах $m_e c$, вводя безразмерный параметр $x = p_F/m_e c$. Тогда

$$N = \frac{(m_e c)^3}{3\pi^2 \hbar^3} x^3.$$

Параметр x является мерой релятивизма: при $x \ll 1$ электроны нерелятивистские, при $x \gg 1$ ультрарелятивистские. Какой плотности вещества соответствует данный x ? Обозначим через $\mu_e \equiv 1/Y_e$ молекулярный вес на один электрон, т.е. среднее число нуклонов на один электрон ($\mu_e = 1$ для водорода, $\mu_e = 2$ для ${}^4\text{He}_2$ и $\mu_e = 2.2$ для ${}^{56}\text{Fe}_{26}$). Тогда $\rho = \mu_e \cdot 1.6 \cdot 10^{-24} N = \mu_e \cdot 10^6 x^3$ [г/см³]. Отсюда следует, что при $\rho < \mu_e \cdot 10^6$ г/см³ имеем $x < 1$, т.е. $p_F < m_e c$, и электроны нерелятивистские. При $\rho > \mu_e \cdot 10^6$ г/см³, $p_F > m_e c$.

Для водорода $x = 0.1$ осуществляется при плотности $\rho = 1000 \text{ г/см}^3$ (для $^{56}\text{Fe}_{26}$ это соответствует $\rho = 2200 \text{ г/см}^3$). Ферми-энергия электронов в этих условиях $E_F = p_F^2 / 2m_e = 5 \cdot 10^{-3} m_e c^2 = 2500 \text{ эВ}$, что в десятки раз превышает энергию связи электронов атома водорода ($E_{\text{св}} = 13.6 \text{ эВ}$). Таким образом, при $x > 0.1$ уже можно пользоваться теорией вырожденного электронного газа.

Рассмотрим нерелятивистскую область $0.1 < x < 1$. Средняя энергия электронов в шаре с объемом $\frac{4\pi}{3} p_F^3$ равна

$\bar{E} = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_e}$, т.е. $\bar{E} \sim x^2$. Давление $P \sim \rho E \sim x^5 \sim \rho^{5/3}$, т.е. холодное нерелятивистское вещество представляет собой газ, подчиняющийся уравнению состояния с $\gamma = 5/3$:

$$P = K\rho^{5/3}.$$

Статистика Ферми (принцип Паули) определяет константу. Для идеального (неквантового) газа K может быть любым. Если охлаждать горячий газ до температуры $T = 0$, то K идет не в нуль, а стремится к определенному пределу. Теперь импульсы и кинетическая энергия обеспечиваются не температурой, а Ферми-движением электронов.

Вспоминая общие формулы, для равновесия:

$$P_c \simeq \frac{G_N M^2}{R^4}, \quad \rho_c \simeq \frac{M}{R^3},$$

а из свойств NR плазмы

$$P = K \rho^{5/3} \sim K \frac{M^{5/3}}{R^5},$$

откуда видим, что радиус белого карлика уменьшается с ростом его массы:

$$R \sim M^{-1/3}.$$

Приведем характеристики типичного белого карлика, состоящего из гелия ($Y_e = 0.5$) с массой

$$M = 0.25 M_\odot = 0.5 \cdot 10^{33} \text{ г}; \quad \rho_c = 2.5 \cdot 10^5 \text{ г/см}^3, \quad \rho = 4 \cdot 10^4 \text{ г/см}^3, \quad R = 1.4 \cdot 10^9 \text{ см}.$$

Строго говоря, полученные выше результаты относятся к абсолютно холодному веществу. Вещество белых карликов, которые мы наблюдаем, имеют отличную от нуля температуру (они светят!). Но температура даже в несколько миллионов градусов мала по сравнению с характерной ферми-энергией электронов ($kT \ll E_F$). Поэтому тепловое движение плазмы не существенно при расчете равновесия и устойчивости белых карликов, хотя для расчета их охлаждения оно важно.

С увеличением массы белого карлика растут импульсы электронов, получаем давление $P \sim \rho^{4/3}$.

Таким образом, ультрарелятивистский вырожденный электронный газ подчиняется уравнению состояния с показателем $\gamma = 4/3$.

$$P_c \simeq \frac{G_N M^2}{R^4}, \quad \rho_c \simeq \frac{M}{R^3},$$

а из свойств ER плазмы

$$P = K \rho^{4/3} \sim K \frac{M^{4/3}}{R^4}.$$

Сравнивая два выражения для давления, видим, что равновесное состояние возможно только при одной определенной массе – чандрасекаровской:

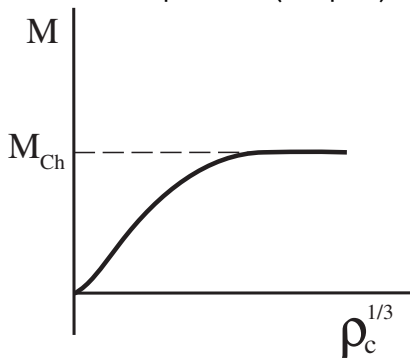
$$M \sim (K/G)^{3/2}$$

Для вырожденного релятивистского вещества точный расчёт даёт значение чандрасекаровской массы

$$M_{\text{Ch}} = \frac{5.75}{\mu_e^2} M_{\odot}.$$

Для $\mu_e = 2$, $M_{\text{Ch}} = 1.44 M_{\odot}$.

Для всех промежуточных случаев центральной плотности имеются точные численные расчёты (см. рис.).



Итак, для холодного вещества решение существует только при $M < M_{\text{Ch}}$ (M_{Ch} — называют чандрасекаровским пределом массы). Из наблюдений мы знаем, что есть горячие звезды с массой, большей M_{Ch} . В результате эволюции при остывании таких звезд должна происходить потеря устойчивости и коллапс (быстрое сжатие) звезды.

В ньютоновской теории более жесткое уравнение состояния (например, отталкивание ядер) могло бы спасти звезду от коллапса. Однако в ОТО при любом уравнении состояния релятивистские эффекты всегда приводят к неустойчивости и неограниченному коллапсу.

Получим выражение для предельной массы белого карлика через фундаментальные физические величины m_p , \hbar , c , $G \equiv G_N$, или, другими словами, найдем предельное число нуклонов N_{Ch} , для которых гравитация ещё уравновешивается давлением вырожденных электронов. Имеем $M_{\text{Ch}} = m_p N_{\text{Ch}}$.

Из констант G , m_p , \hbar и c можно составить только одно безразмерное число: $Gm_p^2/\hbar c \simeq 0.7 \cdot 10^{-38}$ (аналог постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$) – **проверьте размерности**: видно, что размерности Gm_p^2 и e^2 одинаковы, так как деление на длину в обоих случаях даёт энергию (потенциальную). Размерность кванта действия \hbar – это энергия, умноженная на время. Умножим на скорость света c и получим как раз энергию, умноженную на длину. По определению N_{Ch} безразмерно и

$$M_{\text{Ch}} = m_p N_{\text{Ch}} = m_p \left(\frac{Gm_p^2}{\hbar c} \right)^\alpha.$$

Как найти α ? Воспользуемся для этого уравнением состояния ультрарелятивистского вещества и найдем постоянную K (приблизенно, опуская тройки и т.п.)

$$E_1 = cp = c\hbar n^{1/3}, \quad P \approx nE_1 = c\hbar n^{4/3}, \quad \rho = m_p n,$$

т.е. $P \approx \frac{c\hbar}{m_p^{4/3}} \rho^{4/3}$ и $K \approx \frac{c\hbar}{m_p^{4/3}}$.

Для $\gamma = 4/3$ мы получили $M \sim (K/G)^{3/2}$. Подставляя K , имеем

$$M = \frac{c^{3/2} \hbar^{3/2}}{G^{3/2} m_p^3} m_p = m_p \left(\frac{c \hbar}{G m_p^2} \right)^{3/2}, \text{ т.е. } \alpha = -\frac{3}{2}.$$

Тут число размерности массы – планковская масса:

$$m_{Pl} = \left(\frac{c \hbar}{G} \right)^{1/2} \simeq 10^{19} \text{ ГэВ} \simeq 10^{-5} \text{ г.}$$

Окончательно

$$M_{Ch} \sim m_p (10^{38})^{3/2}, \quad N_{Ch} \sim 10^{57}.$$

Такое большое число обусловлено тем, что константа гравитационного взаимодействия мала.

Чего не было на лекции, но
полезно знать об
астрофизике

Stellar populations

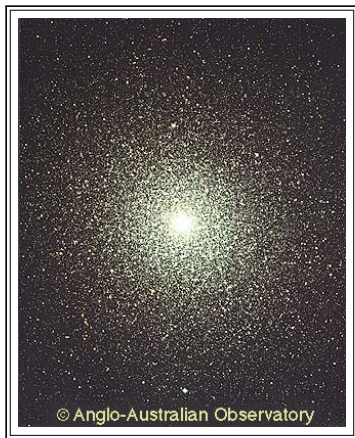
Astronomers find a great variety of systems: detached and contact binaries, symbiotic stars, binary X-ray sources, with accretion onto neutron stars and black holes.

Types of stellar population: young (pop. I), and old (pop. II).

Young: star forming regions, HII regions (ionized hydrogen), SNe II (supernovae of type II), open stellar clusters, spiral arms in spiral galaxies.

Old: globular clusters, elliptic galaxies.

Globular Cluster NGC104



Globular Cluster NGC5139= Ω Cen

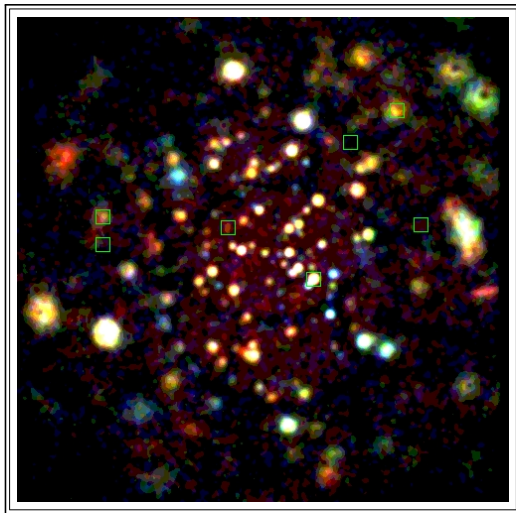


Open Cluster = рассеяное звёздное скопление

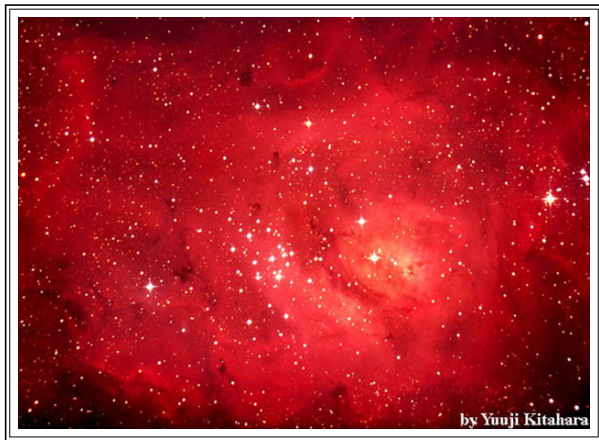
M103



Pleiades



Open Cluster M8 in Lagoon Nebula



Trapezium in Orion

Trapezium cluster: visible and infrared light comparison.

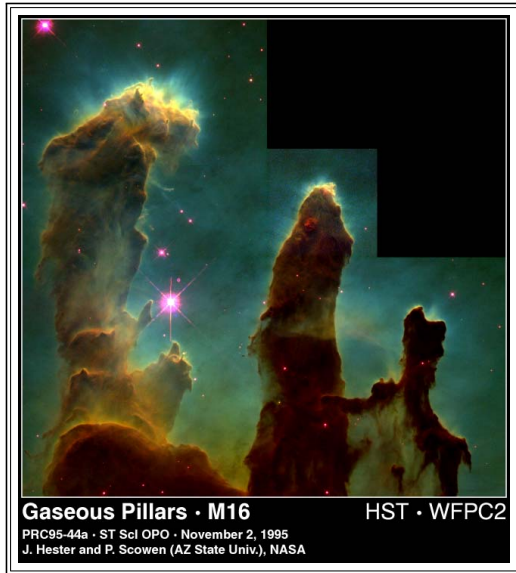


Interstellar medium (ISM)

Межзвёздная среда

Interstellar medium (ISM) is rich in objects like planetary nebulae, supernova remnants, superbubbles. The matter in space is important for star formation, for SN remnants and for explaining the afterglows of gamma-ray bursts.

Gas and dust in space



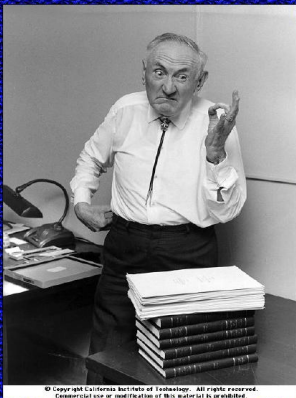
Stellar clusters and galaxies

Open clusters: $10^2 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^5 M_{\odot}$.

Globular clusters: $M \sim 10^6 M_{\odot}$.

Our Galaxy = Milky Way with the mass $M \sim 10^{11} M_{\odot}$, there are dwarf galaxies with masses 10^3 times smaller and giant ones – tens times larger.

Первое указание на DM пришло из скоплений галактик



Fritz Zwicky (1933): Тёмная материя должна сдерживать скопление галактик СОМА от расширения — эта статья была забыта до 1970х годов

Вириальный парадокс

Тёмная материя в скоплениях галактик



Стационарная система "частиц", связанных гравитацией, подчиняется теореме вириала

$$2\langle E_{\text{kin}} \rangle = -\langle E_{\text{grav}} \rangle$$

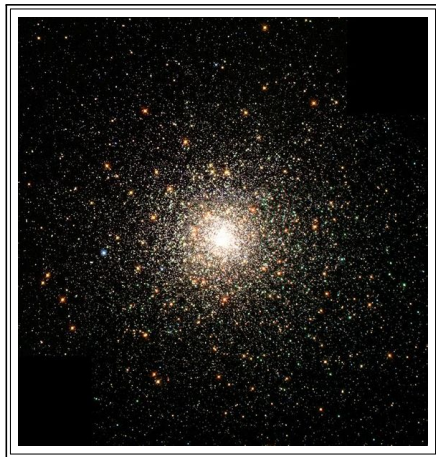
$$2\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{G_N M_r m}{r} \right\rangle$$

$$\langle v^2 \rangle \approx G_N M_r \langle r^{-1} \rangle$$

Скорость измеряется по доплер-эффекту в спектральных линиях

Оценка массы

Globular Cluster = Шаровое звёздное скопление M80



Вириального парадокса нет в шаровых скоплениях звёзд

Это можно понять, если использовать только $v^2 \approx G_N M/R$. Можно учесть теорему вириала в формулировке $U_g = -2E_{\text{kin}}$, где E_{kin} - средняя по времени кинетическая энергия движения частиц тела (системы). Саму теорему можно вывести в разных приближениях (в том числе и квантовом).

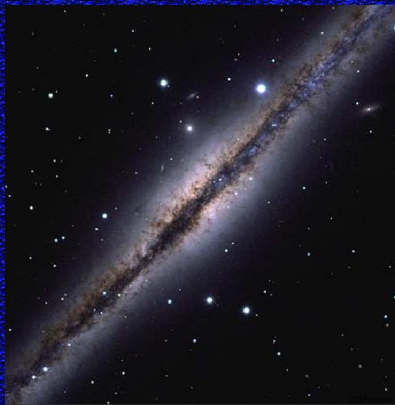
Имеем оценку $M = v^2 R/G_N$, где v - средняя квадратичная скорость членов системы. А значит, можно связывать наблюдаемые величины, скорость тел и массу системы. И если наблюдаемой массы и размеров системы не достаточно для описания наблюдаемой скорости, то возникает “вириальный парадокс”. На слайдах выше показаны скопления галактик Coma и Virgo, в которых и был впервые обнаружен вириальный парадокс в 1930-е годы.

Открытие DM в галактиках

Спиральные галактики



NGC 2997 плашмя

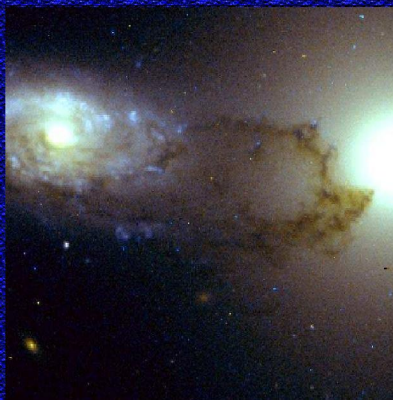


NGC 891 с ребра

Спиральные и эллиптические



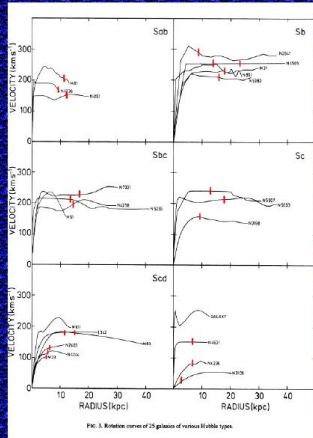
M51 со спутником



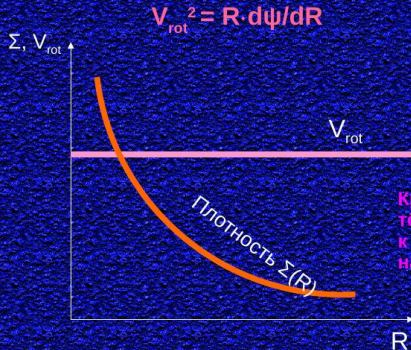
Периферия рукавов на фоне далёкой эллиптической галактики

Вращение галактик на периферии (где мало горячих звёзд) можно наблюдать в радиодиапазоне (нейтральный водород, мазеры CO...)

Длинные плоские кривые вращения-не главное!



Например, Диск Местеля



Диск Местеля имеет такое распределение поверхностной плотности:

$$\Sigma(R) \sim \Sigma_0 R_0 / R$$

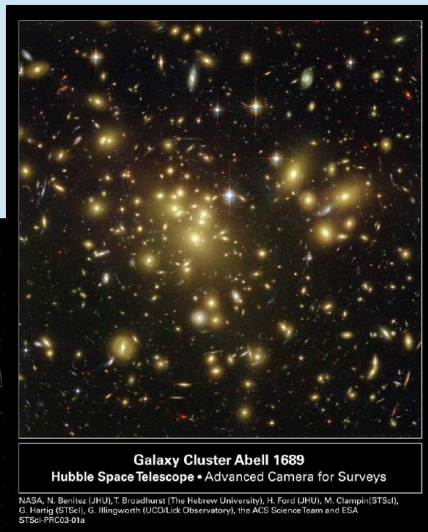
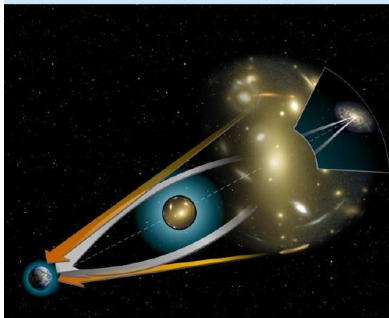
$$V_{\text{rot}}^2 = 2\pi G \Sigma_0 R_0$$

Кривая вращения плоская без всякой тёмной материи, но отношение массы к светимости M/L оказывается не похожим на известные объекты

ПРОБЛЕМА СКРЫТОЙ ИЛИ ТЁМНОЙ
МАССЫ ВОЗНИКЛА ИЗ-ЗА СИЛЬНОГО
РАССОГЛАСОВАНИЯ ПРЯМЫХ
(кинематических) И КОСВЕННЫХ
(фотометрических) ОЦЕНОК МАССЫ
ГАЛАКТИК (и их систем)

Тёмная материя: гравитационное линзирование

Наблюдения далёких галактик
сквозь линзирующие их скопления
галактик позволяют оценить
массу скопления-линзы



Galaxy Cluster Abell 1689
Hubble Space Telescope • Advanced Camera for Surveys

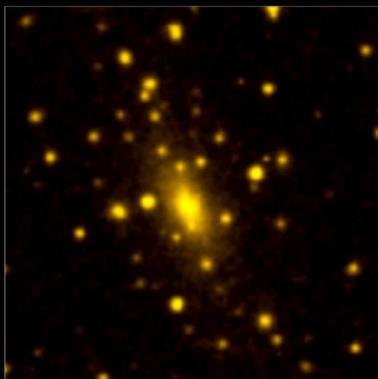
NASA, N. Benitez (JHU), T. Broadhurst (The Hebrew University), H. Ford (JHU), M. Clampin (STScI),
G. Hartig (STScI), G. Illingworth (UCO/Lick Observatory), the ACS Science Team and ESA
STScI-PRC03-01a

Hot X-Ray Gas in Clusters of Galaxies



Abell 2029

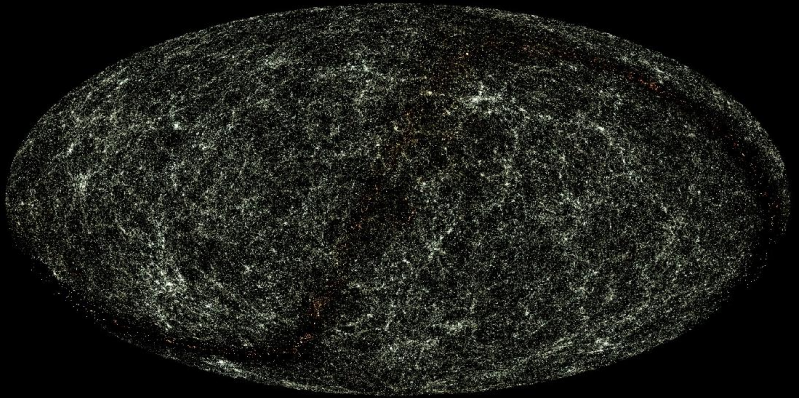
CHANDRA X-RAY



DSS OPTICAL

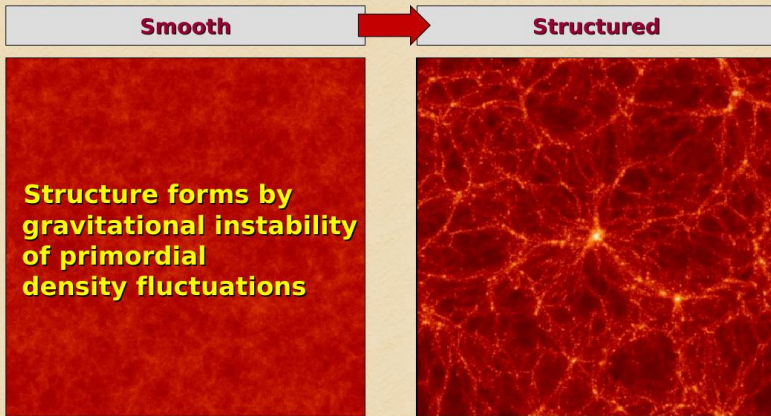
Most of the baryonic mass in a typical galaxy cluster resides in hot, x-ray emitting intergalactic gas - этот горячий газ не может быть удержан своим гравитационным полем - нужна DM

Sky Distribution of Galaxies (XMASS XSC)



http://spider.ipac.caltech.edu/staff/jarrett/2mass/XSC/jarrett_allsky.html

Образование структур во Вселенной



“Газ” DM должен быть нерелятивистским (холодным), иначе структуры замоются. Cold Dark Matter = CDM

Рост флуктуаций в расширяющейся Вселенной

Возмущения барионной компоненты

На момент рекомбинации $\frac{\delta\rho_b}{\rho_b} \simeq 3\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-4}$;
на линейной стадии возмущения могут вырасти в $a_0/a_{rec} = 1 + z_{rec} \simeq 10^3$ раз,
что явно недостаточно для образования галактик.



Необходимо, чтобы возмущения плотности и грав. потенциала обеспечивались другим (небарионным) веществом, не связанным с излучением к моменту рекомбинации



Аргумент в пользу существования небарионной тёмной материи

Тёмная материя: наблюдательные свидетельства

- Образование крупномасштабной структуры Вселенной
- Избыток массы во внешних частях галактик (кривые вращения галактик)
- Избыток массы в скоплениях галактик (по дисперсии скоростей галактик, по горячему газу и по массе гравитационных линз)
- Реликтовый фон: $\Omega_m \sim 0.27$, но $\Omega_{\text{bar}} \sim 0.04$

Big Bang

The strongest explosion: Big Bang and expanding Universe (a Newtonian view).

Hubble law of expansion:

$$v = H_0 d, \quad H_0 \approx 70 \text{ km/s/Mpc},$$

so $t_H = 1/H_0 \approx 1.5 \times 10^{10}$ yrs gives the time-scale of the expansion of Universe.

Вспомним историю

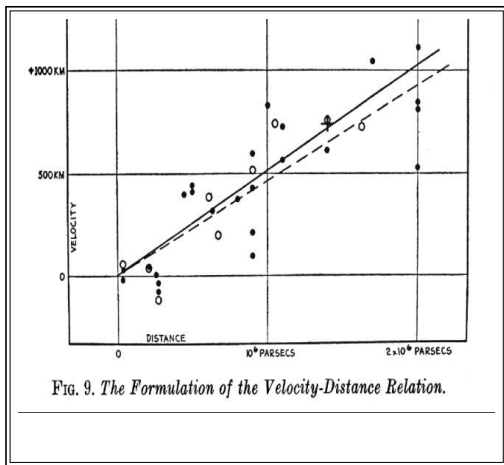
Hubble's Law, 1929

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{H_0 d}{c}$$

– true only for nearby objects $z \ll 1$, but already in the “Hubble flow”.

Hubble parameter,

$$H = \dot{a}/a .$$



vd Bergh on History 1108.0709

1922 From radial velocities of only 29 spirals Wirtz concludes that either the nearest or the most massive galaxies have the smallest redshifts.

1924 Using observations of 42 galaxies Wirtz concludes (translation by van den Bergh) “that there remains no doubt that the positive radial velocities of spiral nebulae grow quite significantly with increasing distance.”

1925 Lundmark: results similar to Wirtz.

1927 Lemaître derives the expansion rate of the Universe (i.e. the “Hubble” parameter) and explains its expansion in terms of the General Theory of Relativity repeating Friedmann (1922-24) models.

1929 Hubble repeats Lemaître’s work with essentially the same data and obtains similar results.

Da die zugrunde gelegten Werte verschiedenen Quellen entnommen werden mußten, für dieselben Nebel auch manchmal etwas abweichende Zahlen sich fanden, so folgt hier die kleine Liste der angenommenen

Radialbewegungen von 29 Spiralnebeln.

NGC	km	NGC	km	NGC	km
221	- 300	3115	+ 600	4649	+ 1090
224	- 316	3379	+ 810	4736	+ 290
584	+ 1800	3521	+ 730	4826	+ 150
598	- 70	3623	+ 800	5005	+ 900
936	+ 1300	3627	+ 650	5055	+ 450
1023	+ 300	4151	+ 940	5194	+ 270
1068	+ 1120	4258	+ 500	5236	+ 500
1700	+ 500	4526	+ 580	5866	+ 650
2683	+ 400	4565	+ 1100	7331	+ 500
3031	- 30	4594	+ 1180		

Alle diese statistischen Erscheinungen lagern sich über den auffälligsten und Hauptvorgang, der sich als ein Auseinandertreiben des Systems der Spiralnebel relativ zu unserm Standpunkt beschreiben läßt. Dann bedeutet z. B. die Abhängigkeit von der galaktischen Breite, daß die Nebel bei den Polen sich rascher von uns entfernen als die Nebel der niedrigeren Breiten, und die Abhängigkeit von der Größenklasse zeigt an, daß die uns nächsten oder auch die massenstarken Spiralnebel eine geringere Auswärtsbewegung besitzen als die fernen oder etwa die massenschwachen Nebel. Daß der Zielpunkt aus den Radialbewegungen der Spiralnebel nichts zu tun hat mit dem Sonnenapex, ist bekannt.

Redshift

После введения в СТО и ОТО мы скоро определим масштабный фактор a в космологии. Пока для нас это будет просто масштаб для больших расстояний между далёкими галактиками.

Вспомним, что при адиабатическом расширении для фотонов $\lambda \propto$ размерам системы. Тогда $\lambda \propto a$, отсюда красное смещение - redshift:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1} - 1 .$$

Not always identical with the conventional Doppler effect.

The redshifts can be measured more or less directly. So we know the ratio of the scale factors:

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z,$$

where t_1 and t_0 are the moments of emission and observation.

Big Bang

The strongest explosion: Big Bang and expanding Universe (a Newtonian view).

Никакие приборы непосредственно разбегания не видят!

Hubble law of expansion:

$$v = H_0 d, \quad H_0 \approx 70 \text{ km/s/Mpc},$$

so $t_H = 1/H_0 \approx 1.4 \times 10^{10}$ yrs gives the time-scale of the expansion of Universe.

Это число случайно довольно близко к возрасту нашей Вселенной, так как закон расширения сложный из-за DE.

Ньютоновская космология

Приняв, что средняя плотность вещества ρ однородна на больших масштабах ($R > 100$ Мпк в современной Вселенной), мы находим массу в пределах радиуса R , $M = 4\pi\rho R^3/3$, и законы Ньютона дают нам сохранение энергии:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{G_N M}{R} = -\text{const} ,$$

что выполняется, пока $v \equiv \dot{R} \ll c$, так что

$$\frac{(\dot{R})^2}{2} - \frac{4\pi G_N \rho R^2}{3} = -\text{const} .$$

Уравнение Фридмана

Постоянная const в последних уравнениях есть попросту энергия единицы массы в момент t_0 :

$$E_0 \equiv \frac{v_0^2}{2} - \frac{G_N M}{R_0},$$

так что можно написать

$$\frac{(\dot{R})^2}{2} - \frac{4\pi G_N \rho R^2}{3} = -k|E_0|,$$

Где $k = -1, 0, +1$, и тогда это выражение совпадает с уравнением Фридмана в ОТО, если мы a обозначим как радиус R :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3c^2} \mathcal{E} - \frac{kc^2}{a^2}.$$

Космологические параметры

Параметр Хаббла для произвольного момента времени t

$$H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

Обычно t_0 обозначает в космологии время наблюдения – нашу эпоху: $H_0 = (\dot{a}/a)_0$.

Определим параметр плотности

$$\Omega \equiv \frac{\mathcal{E}}{\rho_c c^2}, \quad \text{где} \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_N}.$$

Запишем ур. Фридмана как

$$H^2 = \Omega H^2 - \frac{kc^2}{a^2}, \quad \text{откуда} \quad H^2(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{a^2}.$$

Параметр Хаббла и Ω

Поскольку $H_0 = (\dot{a}/a)$ теперь, мы видим, что константа k в уравнении Фридмана положительна или отрицательна в зависимости от Ω .

Если $\Omega > 1$, то $k = 1$.

При $\Omega = 1$, $3D$ -пространство плоское: $k = 0$, а при $\Omega < 1$ имеем $k = -1$.

Когда $\Omega \neq 1$ из последнего выражения можно найти масштабный фактор a по наблюдаемым H_0 , Ω .

Hubble constant

The rate of expansion is measured by the [Hubble parameter](#),

$$H = \frac{\dot{a}}{a} .$$

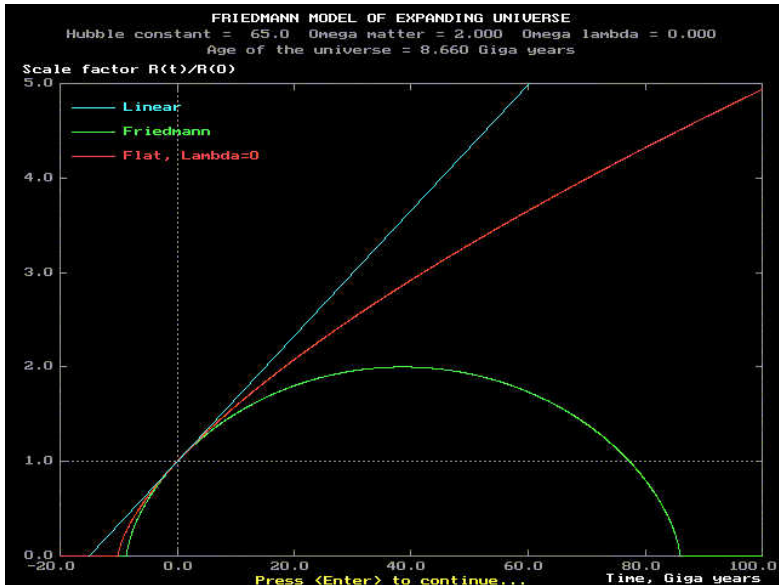
Since $H_0 = (\dot{a}/a)|_{\text{now}}$, we see that const k is positive or negative depending on the ratio

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \text{with} \quad \rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G_N} .$$

Latest value for H_0 Riess et al. ApJ, 1 Apr 2011:

$$H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Scale factor $\Omega = 1, \Omega = 2$



Scale factor $\Omega_\Lambda = 0.9$, $\Omega_m = 0.1$



Резюме:

Кеплер и Ньютон - везде: орбиты планет, в двойных системах, аккреционные диски, вращение галактик, аккреция на чёрную дыру в квазаре, локальное расширение Вселенной.

Но большое отклонение от ньютоновской гравитации возможно, в принципе, даже в земном масштабе.

Релятивистские эффекты важны в плотных звездах и квазарах, в крупномасштабном расширении Вселенной и даже в земном GPS - Глонасс.

Полезно запомнить: солнечные единицы для обозначения массы, светимости; единицы расстояния AU, pc; энергия взрыва единица $1 \text{ foe} = 10^{51}$ эргов.

Конец 3й лекции