

Краткий обзор экспериментов по измерению  
нейтронной (или протонной) шубы на ядрах  
никеля и свинца и сравнение с предсказаниями  
TDHF кода Sky3D

Блинников С.И.<sup>1,2,3</sup>

Урвачев Е.М.<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> НИЦ “Курчатовский институт” – ИТЭФ, Москва

<sup>2</sup> ГАИШ МГУ, Москва

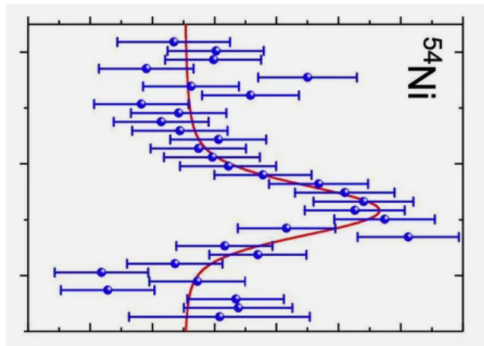
<sup>3</sup> ИСМ и ВНИИА, Москва

Астросеминар ИТЭФ, 11 февраля 2022

## Физики измерили толщину нейтронной кожи ядра никеля

Андрей Фельдман

10 ноября 2021



S. V. Pineda et al. / Physical Review Letters, 2021

Физики нашли толщину нейтронного слоя на поверхности ядра никеля, сравнив зарядовые радиусы ядер  $^{54}\text{Ni}$  и  $^{54}\text{Fe}$ . Это значение связано с величиной энергии обменного взаимодействия в ядерной материи, поэтому и важно для понимания физики тяжелых атомных ядер и нейтронных звезд. Результаты эксперимента достаточно хорошо совпали с данными, полученными в предыдущих лабораторных экспериментах, и данными наблюдений за слиянием пары нейтронных звезд. Исследование [опубликовано](#) в *Physical Review Letters*.

“Neutron skin”, скорее всего, правильно переводить “нейтронная шуба” или “гало”.

А ещё нужно смотреть, нейтронная она или протонная, так что в этой популярной новости уже в заголовке ошибки. Потом посмотрим, что было в статье.



## Charge Radius of Neutron-Deficient $^{54}\text{Ni}$ and Symmetry Energy Constraints Using the Difference in Mirror Pair Charge Radii

Skyy V. Pineda, Kristian König, Dominic M. Rossi, B. Alex Brown, Anthony Incorvati, Jeremy Lantis, Kei Minamisono, Wilfried Nörtershäuser, Jorge Piekarewicz, Robert Powel, and Felix Sommer  
Phys. Rev. Lett. **127**, 182503 – Published 29 October 2021

## ABSTRACT

The nuclear root-mean-square charge radius of  $^{54}\text{Ni}$  was determined with collinear laser spectroscopy to be  $R(^{54}\text{Ni}) = 3.737(3)$  fm. In conjunction with the known radius of the mirror nucleus  $^{54}\text{Fe}$ , the difference of the charge radii was extracted as  $\Delta R_{\text{ch}} = 0.049(4)$  fm. Based on the correlation between  $\Delta R_{\text{ch}}$  and the slope of the symmetry energy at nuclear saturation density ( $L$ ), we deduced  $21 \leq L \leq 88$  MeV. The present result is consistent with the  $L$  from the binary neutron star merger GW170817, favoring a soft neutron matter EOS, and barely consistent with the PREX-2 result within  $1\sigma$  error bands. Our result indicates the neutron-skin thickness of  $^{48}\text{Ca}$  as 0.15–0.21 fm.

Т.е. нейтронная шуба здесь не для никеля, а для 48го кальция (20 протонов + 28 нейтронов).

Запомним, что тут появился параметр  $L$  – “slope of the symmetry energy at nuclear saturation density” – как расшифровать его смысл?



## Код Sky3D

---

Описание кода дано в статье

The TDHF code Sky3D version 1.1 / B. Schuetrumpf, P. G. Reinhard, P. D. Stevenson et al. // *Computer Physics Communications*. – 2018. – August. – Vol. 229. – Pp. 211–213.

Код применялся не только в ядерной физике, но и в астрофизике нейтронных звёзд

Quantum simulations of nuclei and nuclear pasta with the multiresolution adaptive numerical environment for scientific simulations / I. Sagert, G. I. Fann, F. J. Fattoyev et al. // *Phys. Rev. C*. – 2016. – May. – Vol. 93, no. 5. – P. 055801.



## Цели кода Sky3D

---

*Nature of problem:* The time-dependent Hartree–Fock equations can be used to simulate nuclear vibrations and collisions between nuclei for low energies. This code implements the equations based on a Skyrme energy functional and also allows the determination of the ground-state structure of nuclei through the static version of the equations. For the case of vibrations the principal aim is to calculate the excitation spectra by Fourier-analyzing the time dependence of suitable observables. In collisions, the formation of a neck between nuclei, the dissipation of energy from collective motion, processes like charge transfer and the approach to fusion are of principal interest.





Модель среднего поля в ядре, основанная на силах Скирма, и родственные этой модели функционалы плотности нашли широкое применение для описания основных состояний ядер, коллективных колебательных возбуждений, и столкновений тяжёлых ионов. Код Sky3D решает статические или динамические уравнения на трехмерной декартовой сетке с изолированными или периодическими граничными условиями и не использует дополнительных предположений о симметрии. Спаривание нуклонов может быть включено в приближении БКШ для статического случая. Код реализован так, чтобы его можно легко модифицировать для включения дополнительной физики или специального анализа результатов.

Код удовлетворительно предсказывает ответы для энергии связи ядер. Например, для  $^{208}\text{Pb}$  код даёт 7.841 МэВ/нуклон, а эксперимент 7.867 (Audi, G.; Wapstra, A. H.; Thibault, C. 2003NuPhA.729..337A)



TDHF code Sky3D версия 1.1 доступна по ссылке:

<https://data.mendeley.com/datasets/vzbrzvyrn4/1>

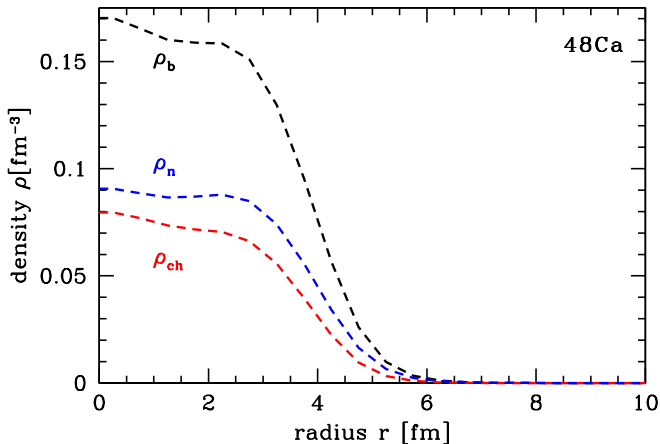
Нужно иметь в виду, что код – не Хартри-Фок, как можно думать по аббревиатуре TDHF, а является нестационарным методом функционала плотности (DFT). Авторы пишут:

“Most recent Skyrme density functionals contain terms such as fractional powers of the density that cannot be related to a two- or three-body interaction. In that sense, the present code solves the TDDFT rather than TDHF equations. Nevertheless, we prefer to keep the name TDHF since it is associated historically with this large field of nuclear reaction theory.”

Отметим, что все параметры потенциалов, заложенные в код, соответствуют данным ранее 2018 г. Мы увидим, что предсказания кода удовлетворительно описывают последние эксперименты, опубликованные в 2021 г., для интересующих нас ядер, что придаёт уверенности в его надёжности без подгонки параметров.



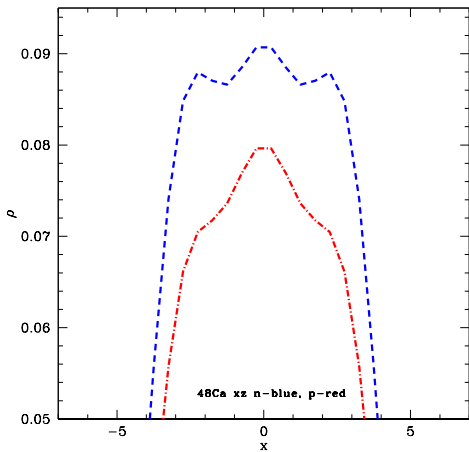
# Sky3D для $^{48}\text{Ca}$



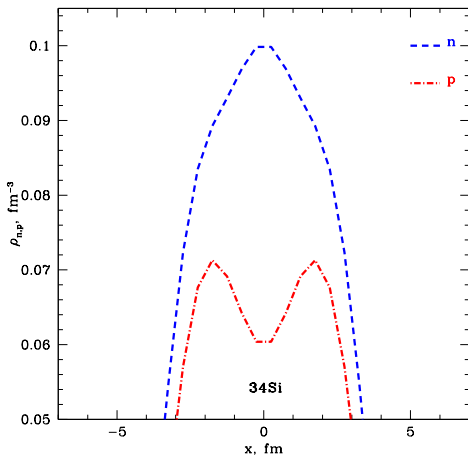
У нас  $R_n = 3.6031$ ,  $R_p = 3.4386$ , т.е.  $R_n - R_p = 0.1645$  фм, а у Pineda et al. (2021) neutron skin 0.15 – 0.21 fm.

# Sky3D для $^{48}\text{Ca}$

---

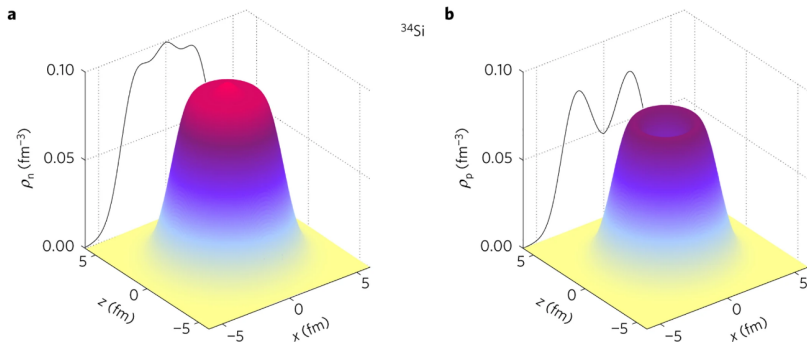


# Рассмотрим $^{34}\text{Si}$



В самом деле, в Sky3D получается bubble в распределении протонов.

# Измерено на эксперименте с $^{34}\text{Si}$



Mutschler et al. A proton density bubble in the doubly magic  $^{34}\text{Si}$  nucleus. // *Nature Physics*, **13** (Feb 2017). На рисунке дан расчёт другим методом из этой статьи, где проведено сравнение с экспериментом.

## Основы для ядерной материи

---

По книге

P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev (2007)

Neutron Stars. Equation of State and Structure

стр. в pdf: энергия на нуклон, насыщение (saturation) etc. pp. 239, 240

потенциал Скирма Skyrme-type interaction eq. 3.14 p. 149 и p. 231

The idea of Skyrme was to approximate the effective nuclear interaction in nuclear matter by zero-range (contact) two-body and three-body forces, with additional momentum-dependent terms representing the finite range of the interaction. The numerical parameters were to be determined from the properties of atomic nuclei. These “Skyrme forces” played central role in the development of the many-body theory of nuclear structure after powerful computers became available in early 1970s.



The basic assumption which justifies a Skyrme-type effective NN interaction (Skyrme, 1956) is that its range is small as compared with the internucleon distances. This means, that in momentum representation the effective NN interaction  $\hat{v}^{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  can be approximated by a momentum independent term plus terms quadratic in the initial and final relative momenta of an interacting nucleon pair,  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{k}'$ , with the appropriate spin dependence. Its standard parametrization is



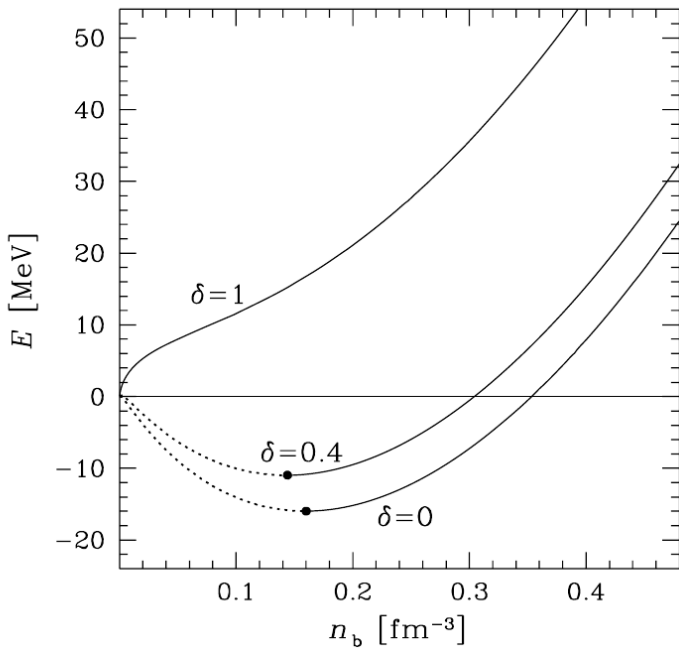
$$\begin{aligned} \hat{v}_{12}^{\text{eff}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= t_0 (1 + x_0 \hat{P}_\sigma) + \frac{1}{2} t_1 (1 + x_1 \hat{P}_\sigma) (\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2) \\ &\quad + t_2 (1 + x_2 \hat{P}_\sigma) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') + t_3 (1 + x_3 \hat{P}_\sigma) n_b^\gamma, \end{aligned} \quad (3.14)$$

where  $\hat{P}_\sigma = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$  is the spin exchange operator. Numerical values of the parameters  $t_0, x_0, \dots, \gamma$  are to be determined from fitting masses of laboratory nuclei in ground states and low-lying excited states. In coordinate space, the first and the last terms of Eq. (3.14) generate zero-range (contact) component of  $\hat{v}_{12}^{\text{eff}}(\mathbf{r})$ , proportional to  $\delta(\mathbf{r})$ , where  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . The remaining terms contain spatial gradient operators. The basic features of the Skyrme model of  $\hat{v}^{\text{eff}}$  (zero range plus quadratic gradient terms) represent an enormous practical advantage.

Ниже важный параметр асимметрии ядерной материи

$$\delta = \frac{n_n - n_p}{n_b}.$$

При  $\delta = 0$  – симметрия, при  $\delta = 1$  – чистые нейтроны.



*Figure 5.1.* Energy per nucleon versus baryon number density for symmetric nuclear matter ( $\delta = 0$ ), asymmetric nuclear matter with  $\delta = 0.4$  (such an asymmetry corresponds to the neutron-drip point in a neutron star crust and to a central core of a newly born protoneutron star), and pure neutron matter ( $\delta = 1$ ). Minima of the  $E(n_b)$  curves are indicated by filled dots. Dotted segments correspond to negative pressure. Calculations are performed for the SLy4 model of effective nuclear Hamiltonian, which was used to calculate the SLy EOS by Douchin & Haensel (2001). It yields  $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  and  $E_0 = -16.0 \text{ MeV}$ .

Экспериментальное значение плотности насыщения для тяжелых ядер:

$$n_0 = 0.16 \pm 0.005 \text{ fm}^{-3}$$

The minimum of the  $E(n_b)$  curve for symmetric nuclear matter ( $\delta = 0$ ) corresponds to a bound equilibrium state at zero pressure. The values of  $E$  and  $n_b$  at this minimum will be denoted by  $E_0$  and  $n_0$ . Since  $P = n_b^2 dE/dn_b$ , the dotted segment corresponds to negative pressure and is therefore not interesting. The solid segment gives  $E(n_b)$  for symmetric nuclear matter compressed to a density  $n_b > n_0$ . As clear from Fig. 5.1,  $B_0 = -E_0$  is the maximum binding energy per nucleon in nuclear matter. The binding energy per nucleon  $B(A, \delta)$  in a self-bound (i.e., bound under zero pressure) system of  $A$  nucleons with a nonzero neutron excess parameter  $\delta$  will be smaller than  $B_0$ . The value of  $B(A, \delta)$  will tend to  $B_0$  from below, if  $A \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , and the Coulomb forces are switched off. Simultaneously, the mean number density of the system will tend to  $n_0$ . This property, resulting from the interplay of the short-distance repulsion and the long-distance attraction in the NN interaction, is called *saturation*;  $B_0 = -E_0$  is called the binding energy at saturation, and  $n_0$  is the saturation density.

Самое важное здесь получается из

$$dE + PdV = 0, \quad V = 1/n_b.$$



First let us consider the case of small  $\delta$  and small  $(n_b - n_0)/n_0$ , characteristic of terrestrial nuclei. Keeping only the quadratic terms,<sup>11</sup> we get

$$E(n_b, \delta) \simeq E_0 + S_0 \delta^2 + \frac{K_0}{9} \left( \frac{n_b - n_0}{n_0} \right)^2, \quad (5.1)$$

---

<sup>11</sup>The linear term  $E_a \delta$  resulting from charge-symmetry breaking in NN interaction can be neglected because of the smallness of  $E_a$  (Haensel 1977)

where  $S_0$  and  $K_0$  are, respectively, the nuclear *symmetry energy* and *incompressibility* at the saturation point,<sup>12</sup>

$$S_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} \right)_{n_b=n_0, \delta=0}, \quad K_0 = 9 \left( n_b^2 \frac{\partial^2 E}{\partial n_b^2} \right)_{n_b=n_0, \delta=0}. \quad (5.2)$$

The symmetry energy  $S_0$  determines the increase in the energy per nucleon due to a small asymmetry  $\delta$ ; the incompressibility  $K_0$  gives the curvature of the

## В других обозначениях

---

Энергия симметрии ( $a_s$ ) и её производные ( $K, L_{sym}$ ). Здесь  $n_0$  – плотность насыщения:

$$a_s = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_p^2} \Big|_{Y_p=1/2} \quad (1.11)$$

$$L = 3n_0 \left( \frac{\partial a_s}{\partial n} \right)_{n=n_0} \quad (1.12)$$

$$K_{sym} = 9n_0^2 \left( \frac{\partial^2 a_s}{\partial^2} \right)_{n=n_0} \quad (1.13)$$

Здесь вместо  $\delta$  используется  $Y_p = Z/A$  – число протонов на барион.

Тут появляется и параметр  $L$ .

Всё получается из скирмовских параметризаций:

defined in terms of the energy density  $\mathcal{E}$  and particle number density  $\rho$ , is given

$$\begin{aligned}
 E = \frac{\mathcal{E}}{\rho} = & \frac{3\hbar^2}{10M} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \rho^{2/3} H_{5/3} + \frac{t_0}{8} \rho [2(x_0 + 2) - (2x_0 + 1)H_2] \\
 & + \frac{1}{48} \sum_{i=1}^3 t_{3i} \rho^{\sigma_i+1} [2(x_{3i} + 2) - (2x_{3i} + 1)H_2] + \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \rho^{5/3} (aH_{5/3} + bH_{8/3}) \\
 & + \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \rho^{5/3+\delta} \left[ t_4(x_4 + 2)H_{5/3} - t_4(x_4 + \frac{1}{2})H_{8/3} \right] \\
 & + \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \rho^{5/3+\gamma} \left[ t_5(x_5 + 2)H_{5/3} + t_5(x_5 + \frac{1}{2})H_{8/3} \right], \tag{1}
 \end{aligned}$$

with

$$a = t_1(x_1 + 2) + t_2(x_2 + 2), \quad (2)$$

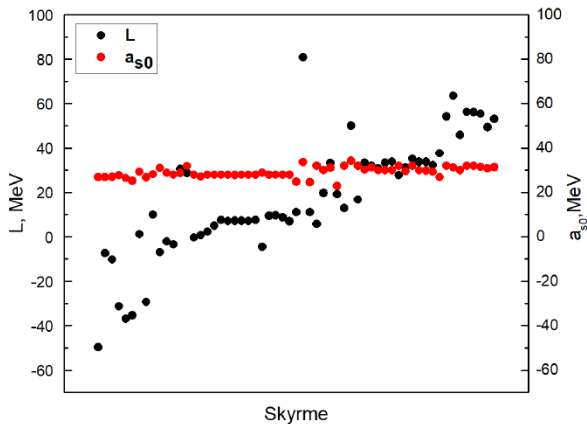
$$b = \frac{1}{2} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)], \quad \text{and} \quad (3)$$

$$H_n(y) = 2^{n-1} [y^n + (1 - y)^n], \quad (4)$$

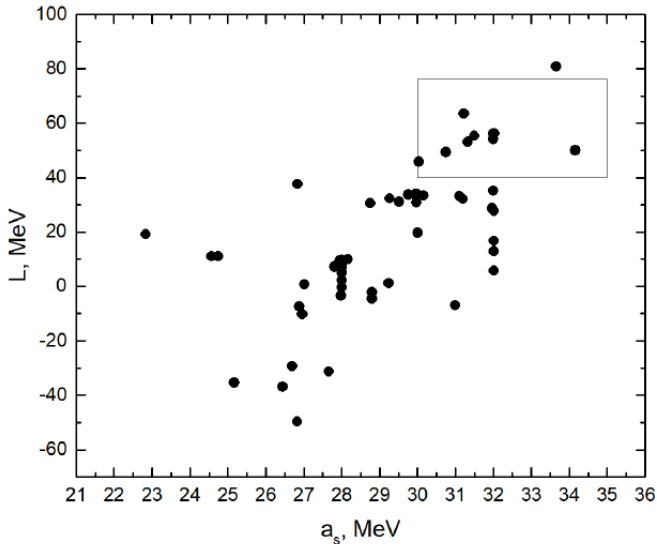
where  $y = Z/A$  is the proton fraction. Eq. (1) includes the summation over index  $i$  in the third term introduced by Agrawal *et al.* [51] and additional terms involving  $t_4, x_4$ , and  $t_5, x_5$ ,

– несколько сотен наборов параметров только в этой статье. Есть и другие параметризации, которые в эту схему не укладываются.





Энергия симметрии в точке насыщения ( $a_{s0}$ ) и её первая производная ( $L$ ) для различных скирмовских параметризаций.



Те же точки в других осях. Прямоугольник соответствует допустимым для нейтронных звёзд значениям  $L$  из Dutra 2012 на следующем рисунке:

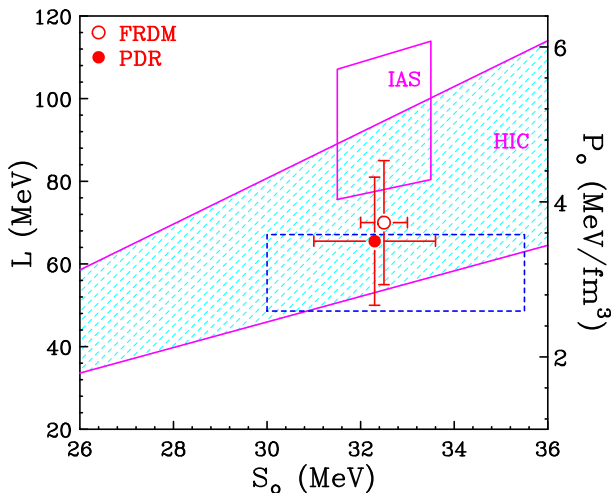


FIG. 6: (color online) Constraints on symmetry energy  $S_0$ , its first derivative  $L$  and  $P_0 = P_{\text{PNM}}(\rho_0)$ , all at saturation density, as derived from HIC [90], PDR [91, 93], IAS [95] and FRDM [89]. Predictions of the consistent Skyrme parameterizations lie all within the blue dashed rectangle. For full explanation see text and [97].

## Вернёмся к нейтронной шубе

---

Уже давно, в работе Nolen J. A., Schiffer J. P., Williams N. The neutron radius of  $^{208}\text{Pb}$  // *Physics Letters B.* – 1968. – Vol. 27, no. 1. – Pp. 1–2, был предложен метод определения радиуса распределения нейтронов в ядре: “The r.m.s. (root-mean-square) radius of the neutron distribution  $R_n$  of  $^{208}\text{Pb}$  is calculated using the experimentally determined r.m.s. charge radius of 5.51 fm and the Coulomb displacement energy of 18.98 MeV. An r.m.s. neutron radius larger than the proton radius by  $0.07 \pm 0.03$  fm is obtained. ”

Здесь используется значение зарядового радиуса для  $^{208}\text{Pb}$  свинца  $R_p = 5.53$  фм. Наш расчёт с помощью Sky3D выдал  $R_p = 5.4420$  фм, а для нейтронного радиуса  $R_n = 5.5968$  фм, близкое к  $R_n = 5.58$  фм из работы Nolen et al. (1968). Из-за меньшего зарядового радиуса разница двух радиусов у нас несколько больше:

$R_n - R_p = 0.1548$  фм для нейтронной “шубы” (neutron skin) вместо 0.07 fm.



В более новой работе Abrahamyan2012PhRvL получено ещё большее значение разницы нейтронного и зарядового радиусов для  $^{208}\text{Pb}$ : “difference between the radii of the neutron and proton distributions  $R_n - R_p = 0.33_{-0.18}^{+0.16}$  fm and provides the first electroweak observation of the neutron skin which is expected in a heavy, neutron-rich nucleus.” В пределах ошибок экспериментальная толщина нейтронной шубы согласуется с нашим значением, выданным кодом Sky3D.

Ещё более новые измерения PREX-2: D. Adhikari et al., Accurate determination of the neutron skin thickness of 208 Pb through parity-violation in electron scattering, Phys. Rev. Lett. 126, 172502 (2021), – дают такие цифры для  $^{208}\text{Pb}$ .  $R_n = 5.800 \pm 0.075$  fm несколько больше нашего  $R_n = 5.5968$  фм. Авторы пишут: “Combined with our previous measurement, the extracted neutron skin thickness is  $R_n - R_p = 0.283 \pm 0.071$  fm. ... The measurement accurately constrains the density dependence of the symmetry energy of nuclear matter near saturation density, with implications for the size and composition of neutron stars.”



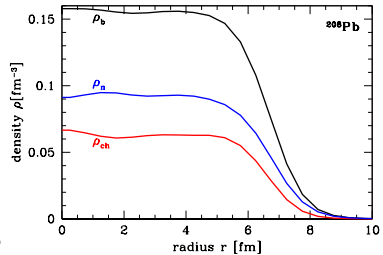
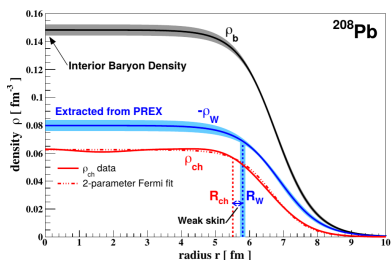


Figure: Распределение плотности протонов и нейтронов в ядре  $^{208}\text{Pb}$  из эксперимента PREX-2, – слева, и по расчётам Sky3D, – справа. В расчёте лучше видна оболочечная структура ядра, которая едва заметна в эксперименте.

Таким образом, толщина нейтронной шубы, полученная в PREX-2 несколько больше, чем даёт Sky3D, но в пределах  $2\sigma$  всё согласуется. Следует заметить, что все авторы таких экспериментов подчёркивают их важность для понимания строения нейтронных звёзд: Scholberg Kate. *Probing the Skin of a Lead Nucleus* // Physics Online Journal. – 2021. – Vol. 14. – P. 58.

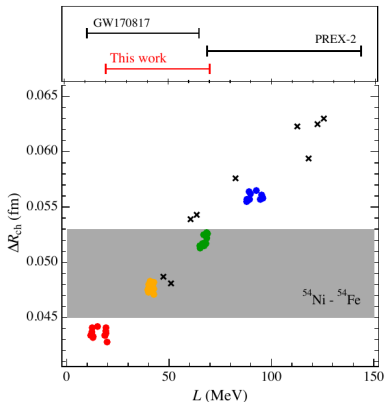
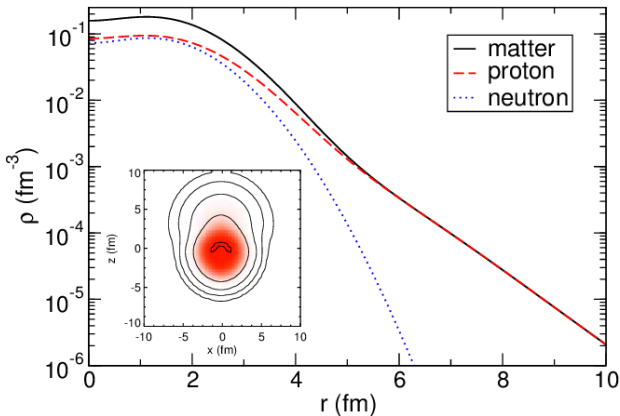


FIG. 2.  $\Delta R_{ch}$  as a function of  $L$  at  $\rho_0$ . The experimental result is shown as a horizontal gray band. The solid circles are results of Skyrme EDF and the crosses are for the CODF calculations. The upper figure shows comparison with the GW170817 and the PREX-2.



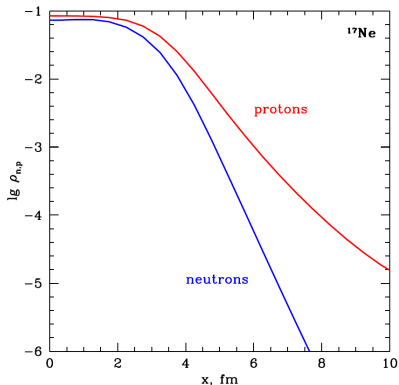
$^{17}\text{Ne}$  matter proton and neutron density distribution. The proton skin thickness is 0.45 fm. The probability to find a proton at  $r > 5$  fm is about 40%. From NeffFeldmeier2008.

Более ярко видно протонную шубу на ещё более лёгких ядрах.

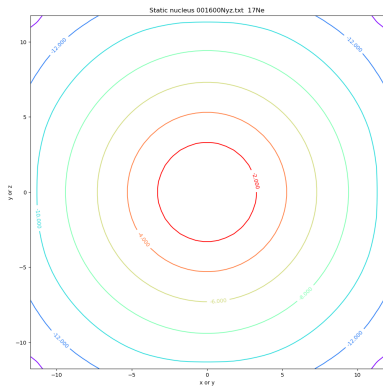
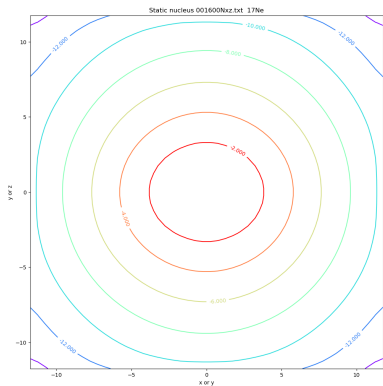
Интересно отметить, что ядро  $^{17}\text{Ne}$  имеет заметно несферическую форму. Наши расчёты подтверждают все эти результаты.



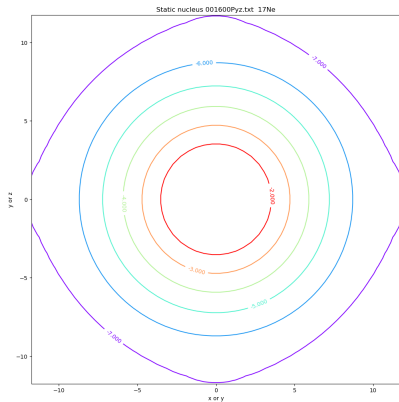
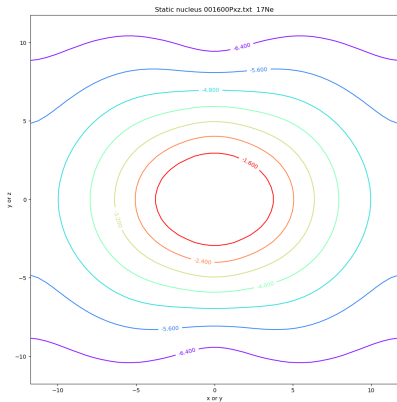
Видно, что распределение нейтронов более сферично, тогда как протоны далеко отклоняются от симметрии. Ориентация осей не совпадает с принятой на рис. с предыдущей страницы.



Распределение плотности протонов и нейтронов в ядре  $^{17}\text{Ne}$  по расчётам Sky3D. Толщина протонной шубы  
 $\Delta R_{\text{ch}} = 2.9941 - 2.6277 = 0.3664$  фм.

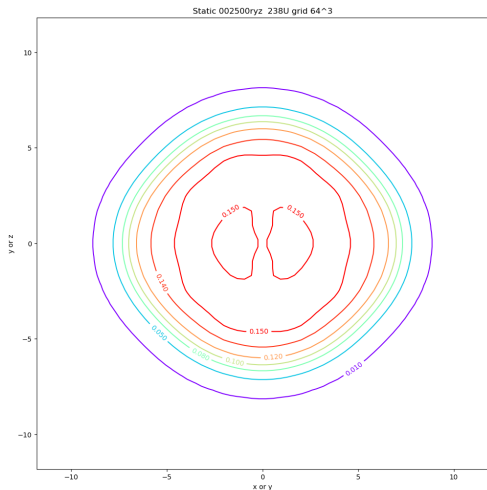


Изолинии плотности нейтронов в ядре  $^{17}\text{Ne}$  по расчётам Sky3D в двух проекциях.



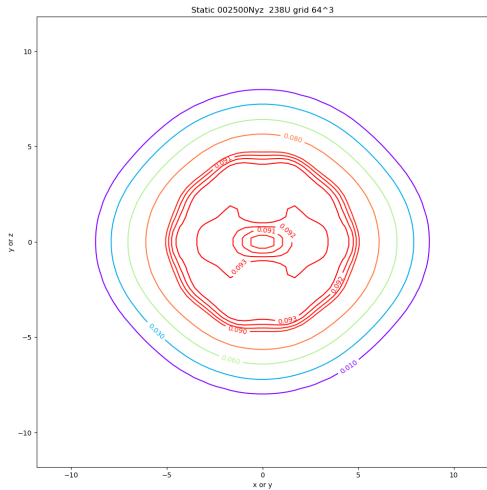
Изолинии плотности протонов в ядре  $^{17}\text{Ne}$  по расчётам Sky3D в двух проекциях.

## Sky3D для тяжелых ядер: $^{238}\text{U}$ , общая плотность

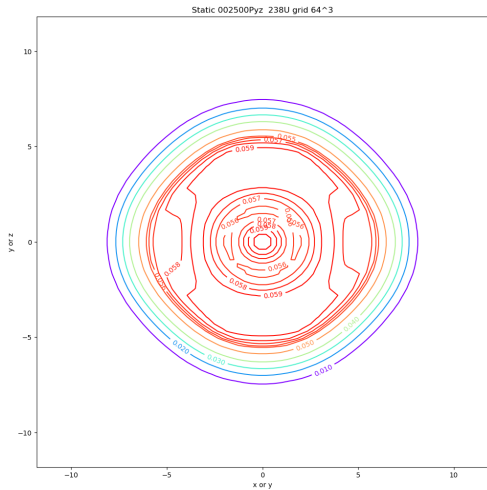


Плотность в центре близка к плотности насыщения, видна сплюснутость ядра.

# Sky3D для тяжелых ядер: $^{238}\text{U}$ , плотность нейтронов



# Sky3D для тяжелых ядер: $^{238}\text{U}$ , плотность протонов



Вывод: Sky3D – хороший код,  
полезный для наших  
приложений.  
Спасибо за внимание!

